Chapitre
Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Le corps des fractions rationnelles

I.1 Définitions

Définition (Fractions rationnelles)

- **Fraction rationnelle** Une **fraction rationnelle** sur $\mathbb{K}$ est notée $F = \dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On note $K(X)$ leur ensemble.
- **Égalité de fractions rationnelles** On définit l'égalité : $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2}$ par $P_1Q_2 = P_2Q_1$. Si $F = \dfrac{P}{Q}$ alors $\dfrac{P}{Q}$ est appelé **UN représentant** de F.
- **Représentant irréductible.** Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, on dit que $\dfrac{P}{Q}$ est **UN représentant irréductible** de F lorsque $P \wedge Q = 1$. Le couple (P, Q) est unique à une constante multiplicative non nulle près.

Remarques (La vraie définition - Hors-programme)

On définit sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(P_1, Q_1)\mathcal{R}(P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1Q_2 = P_2Q_1.$$

On montre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. La classe de (P, Q) est notée $\dfrac{P}{Q}$, donc

$$\frac{P}{Q} = \{(R, S) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \ / \ PS = QR\}.$$

On dit que (P, Q) est UN représentant de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$.

Exemples La fraction rationnelle $\dfrac{X^3 - 3X^2 + 7X}{X(X-1)}$ a pour représentant irréductible $\dfrac{X^2 - 3X + 7}{X - 1}$.

Remarques (Obtenir un représentant irréductible)

On obtient un représentant irréductible de $\dfrac{P}{Q}$ en divisant P et Q par $P \wedge Q$.

I.2 Opérations sur $\mathbb{K}(X)$ et degré

Définition (Lois sur $\mathbb{K}(X)$)

Soient $(F_1, F_2) \in (\mathbb{K}(X))^2$ avec $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$, $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit les lois :

- **Somme**. $F_1 + F_2 = \dfrac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$
- **Multiplication par un scalaire**. $\lambda F_1 = \dfrac{\lambda P_1}{Q_1}$.
- **Produit**. $F_1 \times F_2 = \dfrac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$.

NB : les résultats de ces opérations sont indépendants des représentants choisis.

Théorème (Structure de $\mathbb{K}(X)$)

1) $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps. Le neutre pour $+$ est $\dfrac{0}{1}$ et le neutre pour$\times$ est $\dfrac{1}{1}$.

2) $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Remarques (Les polynômes sont des fractions rationnelles)

L'application $P \mapsto \dfrac{P}{1}$ est un morphisme injectif d'anneaux/d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$, permettant d'identifier tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à la fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$. On peut donc considérer que $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau/sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$.

Définition (Dégré d'une fraction rationnelle)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On définit le degré de F par :

$$\deg F = \deg P - \deg Q.$$

Si $F \neq 0$ alors $\deg F \in \mathbb{Z}$. Si $F = 0$ alors $\deg F = -\infty$.
NB : le degré est indépendant du représentant choisi.

Exemples Si $F = \dfrac{X^2 - 1}{X^3 - 2}$ et $G = \dfrac{X^3 - 2}{X - 1}$ alors $\deg(F) = -1$ et $\deg(G) = 2$.

⚠ **Attention** ⚠ Une fraction constante non nulle (c'est-à-dire $F = \dfrac{\lambda}{\mu}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mu \in \mathbb{K}^*$) à un degré nul. Mais la réciproque est fausse. Contre-exemple :

Théorème (Opérations, degré)

Soient $(F_1, F_2) \in (\mathbb{K}(X))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)$. Il y a égalité si $\deg F_1 \neq \deg F_2$.

2) $\deg(\lambda F_1) = \begin{cases} \deg F_1 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$

3) $\deg(F_1 F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$.

I.3 Zéros et pôles

Définition (Zéros et pôles)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ où $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible.

- On appelle **zéros** de F les racines de P. Un zéro α de F est de multiplicité $m \in \mathbb{N}$ lorsque α est racine de P de multiplicité m.
- On appelle **pôles** de F les racines de Q. Un pôle β de F est de multiplicité $m \in \mathbb{N}$ lorsque β est racine de Q de multiplicité m.

NB : la définition des pôles est indépendante du représentant **irréductible** choisi.

Exemples Soit $F = \dfrac{(X-1)(X-2)^2}{X^3(X^2+1)}$. Quels sont les zéros, les pôles de F et leur multiplicité, dans $R(X)$? Dans $\mathbb{C}(X)$?

Définition (Dérivée d'une fraction rationnelle)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle dérivée de F est définie par : $F' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$.
NB : le résultat ne dépend pas du représentant choisi.

Exercice. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4}$.

Définition (Fonctions rationnelles)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ où $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible.

La fonction rationnelle associée à F est la fonction $\begin{array}{rccc} \widetilde{F} : & \mathbb{K} \setminus \{ \text{ pôles de } F \} & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{array}$. Cette fonction $\widetilde{F}$ sera souvent notée F.

II Décomposition en éléments simples

II.1 Partie entière

Théorème-Définition (Partie entière)

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) où $E \in \mathbb{K}[X]$ (un polynôme donc!) et $G \in \mathbb{K}(X)$ (une fraction rationnelle) tel que

$$F = E + G \qquad \text{et} \qquad \deg(G) < 0.$$

E est appelé la **partie entière** de F, c'est $\boxed{\text{le quotient de la division euclidienne de } P \text{ par } Q}$.

De plus si $E \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, $\deg(E) = \deg(F)$
Conséquence : si $\deg F < 0$, la partie entière de F est nulle.

Exercice. Déterminer la partie entière des fractions rationnelles $F = \dfrac{X^3 - 2X^2 + 3X + 1}{3X^3 - 3}$, $G = \dfrac{2X^3 + 4X^2 - 5X + 2}{X^2 + 2X - 1}$.

II.2 Élément simple

Définition (Élément simple)

- Eléments simples de $\mathbb{C}(X)$: $\quad \dfrac{\lambda}{(X-\alpha)^m} \qquad (\lambda, \alpha) \in \mathbb{C}^2$ et $m \in \mathbb{N}$
- Eléments simples de $\mathbb{R}(X)$
  - de première espèce : $\quad \dfrac{\lambda}{(X-\alpha_i)^m} \qquad (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et $m \in \mathbb{N}$
  - de seconde espèce : $\quad \dfrac{\mu X + \nu}{(X^2 + rX + s)^m} \qquad (\lambda, \alpha, r, s) \in \mathbb{R}^2$ et $m \in \mathbb{N}$

    où le discriminant du polynôme est < 0.

II.3 Théorème de décomposition en éléments simples

Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, c'est l'écrire comme somme de sa partie entière et d'éléments simples.

Théorème (Décomposition en éléments simples)

La décomposition en éléments simples (DES) existe et est unique.

Plus précisément, soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ où $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible.

- Si $Q = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{m_i}$, la DES sur $\mathbb{C}$ est de la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X - \alpha_i)^j} \right).$$

- Si $Q = \lambda \prod_{i=1}^{n_1} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{n_2} (X^2 + r_i X + s_i)^{m_i'}$, la DES sur $\mathbb{R}$ est de la forme :

$$F = E + \sum_{i=1}^{n_1} \left(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X - \alpha_i)^j} \right) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \left(\sum_{j=1}^{m_i'} \frac{\mu_{ij} X + \nu_{ij}}{(X^2 + r_i X + s_i)^j} \right).$$

Exemple Donner la forme de la DES de $F = \dfrac{X^4 - 2X^2 + 2}{(X+1)(X-2)^2}$, $G = \dfrac{X^7 - 4X^4 + 2}{(X-2)^3 (X^2+1)^2}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Décomposition de $\frac{P'}{P}$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé de racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_n$. La décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{X - \alpha_k}.$$

NB : si les racines ne sont pas supposées distinctes, c'est-à-dire comptées avec multiplicité :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_k}.$$

Exercice. Soit $P \in C[X]$ de degré n de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ distinctes ou non. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$. Exprimer l'aide de a, P et ses dérivées les sommes

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a - \alpha_i}$ 2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{a - \alpha_i}$ 3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a - \alpha_i)^2}$ 4) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda \alpha_i + \mu}{(a - \alpha_i)^2}$.

III Pratique de la décomposition en éléments simples

✎ Méthode pratique ✎ (Comment obtenir la DES d'une fraction rationnelle : méthode générale)

1) On donne la forme générale de la DES.
2) On détermine dans l'ordre :
   - la partie entière E
   - les coefficients intervenant dans la décomposition (on peut commencer par ceux associés aux pôles simples et ceux associés aux éléments simples d'exposant la multiplicité)

Exemple Pour décomposer $F = \dfrac{X^6}{(X-1)(X-2)^2(X^2+1)}$ on part donc de

$$\frac{X^6}{(X-1)(X-2)^2(X^2+1)} = aX + b + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-2} + \frac{e}{(X-2)^2} + \frac{fX+g}{X^2+1}$$

puis on détermine les coefficients a, b, c, d, e, f, g avec les techniques vues dans la suite.

III.1 Recherche des coefficients associés aux pôles simples

On considère $F = \dfrac{P}{Q}$ irréductible et α un **pôle simple** de F. On cherche le coefficient devant $\dfrac{1}{X-\alpha}$.

✎ Méthode pratique ✎ (Obtenir le coefficient associé au pôle simple)

Pour obtenir le coefficient λ, on peut utiliser l'une des deux formules

- ♡ **Méthode 1 (multiplication-évaluation)** ♡ : *à utiliser si on a une forme factorisée de Q,*

$$\boxed{\lambda = [(X-\alpha)F(X)]\,(\alpha)}.$$

- **Méthode 2** : *à utiliser plutôt si on a une forme développée de Q ou dans des exercices plus théoriques*

$$\boxed{\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}}.$$

Exercice. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles :

$$F = \frac{X^3+3}{X^2-1} \qquad G = \frac{X^2+3}{X(X-1)(X-2)} \qquad H = \frac{1}{X^n-1}.$$

III.2 Recherche des coefficients associés aux pôles multiples

Soit α un pôle de F de multiplicité m. La DES de D est de forme :

$$F = E + \frac{\lambda_1}{X-\alpha} + \frac{\lambda_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m} + G \ (*).$$

On détermine alors les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Méthode pratique (Quelques trucs de calculs)

- **Truc 1** : multiplication-évaluation, pour λ_m, $\lambda_m = [(X-\alpha)^m F](\alpha)$
- **Truc 2** : si F est paire ou impaire, on trouve des relations entre les coefficients en considérant $F(-X)$.
- **Truc 3** : si on cherche la DES dans $\mathbb{C}(X)$ de $F \in \boxed{\mathbb{R}}(X)$, certains coefficients sont deux à deux conjuguésen considérant la fraction conjuguée et l'unicité de la DES.
- **Truc 4** : on peut calculer la limite en $+\infty$ de $xF(x)$.
- **Truc 5** : on peut trouver des relations entre les coefficients en évaluant en une valeur autre que les pôles.
- **Truc 6** : on peut procéder à une décomposition du numérateur que l'on cherche à exprimer à l'aide du dénominateur.
- **Truc 7** : on met au même dénominateur et on identifie les coefficients (idée naïve, on le fait rarement...)

Exercice.

1) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles $F = \dfrac{X^3-2}{(X-1)(X-2)^2}$ $G = \dfrac{X+3}{(X^2-1)^2}$ $H = \dfrac{X^2}{(X+1)^3}$.

2) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles $F = \dfrac{X^2}{X^4+1}$ $G = \dfrac{X}{(X^2+1)^2}$.

3) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n(1-X)^n}$. *On pourra penser à calculer* $F(1-X)$.

III.3 Recherche des coefficients associés aux pôlynômes irréductibles de degré 2

On cherche les coefficients μ_j et ν_j des éléments simples $\dfrac{\mu_j X + \nu_j}{(X^2+rX+s)^j}$.

Méthode pratique (Obtenir les coefficients associés aux polynômes de degré 2)

- **Truc 1** : si X^2+rX+s est uniquement à la puissance 1, on effectue la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ et on regroupe les paires de conjuguées.
  Attention, cette méthode ne fonctionne pas si X^2+rX+s est à une puissance $\geqslant 2$.
- **Truce 2** : on obtient μ_m et ν_m grâce à l'évaluation $\mu_m\alpha + \nu_m = \left[(X^2+rX+s)^m F\right](\alpha)$ où α est une racine de X^2+rX+s.
- **Truc 3** : on peut trouver des relations entre les coefficients en choisissant des valeurs simples de x autres que les pôles.
- **Truc 4** : on peut calculer la limite en $+\infty$ de $xF(x)$, $x^2F(x)$.
- **Truc 5** : on met au même dénominateur et on identifie les coefficients (idée naïve, on le fait rarement...)

Exercice. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions

$$F = \frac{1}{X^3-1} \qquad G = \frac{X^2-X+3}{(X^2+1)^2} \qquad H = \frac{1}{(X^2+2X+2)(X^2+4)}.$$