Exercice 1

1) Le but de cette question est d'étudier les intégrales de Wallis.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$
   - -a- A l'aide d'un changement de variable judicieux, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
   - -b- Calculer I_0, I_1, I_2.
   - -c- Etudier la monotonie de (I_n). En déduire que (I_n) converge.
   - -d- En utilisant une intégration par parties montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
   - -e- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1) I_n I_{n+1}$. Montrer que la suite (u_n) est constante et déterminer la valeur de la constante.
   - -f- En déduire la limite de (I_n). Puis après avoir prouvé que $I_{n+1} \sim I_n$ donner un équivalent de I_n.
   - -g- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{\pi}{2} \qquad\qquad I_{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2n+1}.$$

Le but de la suite de cet exercice est de prouver la relation $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ noté $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

2) Justifier que pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

3) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in [0, n]$, $\mathrm{e}^{-u} - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \geqslant 0$.

4)
   - -a- A l'aide de 1) montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,1]$, $(1-t)^n \mathrm{e}^{nt} \geqslant (1-t^2)^n$.
   - -b- Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $t \in [0,1]$, $(1-t^2)^n \geqslant 1 - nt^2$.
   - -c- En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel $u \in [0, n]$, $\mathrm{e}^{-u} - (1 - \frac{u}{n})^n \leqslant \frac{u^2}{n} \mathrm{e}^{-u}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - -a- Trouver une relation entre $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$ et $\int_0^1 (1-u^2)^n \, \mathrm{d}u$.
   - -b- Montrer que $\int_0^1 (1-u^2)^n \, \mathrm{d}u = I_{2n+1}$.
   - -c- En déduire la limite en $+\infty$ de la suite de terme général $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

6)
   - -a- Étudier la parité de f.
   - -b- Montrer que f est croissante.
   - -c- Montrer que f est majorée. On rappelle qu'un majorant doit être indépendant de la variable.
   - -d- En déduire que f possède une limite finie en $+\infty$.

7)
   - -a- Dresser le tableau de variations de la fonction $h : t \mapsto t^4 \mathrm{e}^{-t^2}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'elle y est bornée.
   - -b- Montrer que la suite de terme général $\int_0^{\sqrt{n}} \left(\mathrm{e}^{-t^2} - \left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t$ converge vers 0. [On pourra utiliser les résultats de 3) et 4)-c-.]
   - -c- En déduire que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{-\infty} f$?.