Remarques :

- Une erreur souvent rencontrée. Si l'on sait que le produit de deux $DL_1(0)$ donne un $DL_1(0)$, il n'en va pas de même pour les développements asymptotiques. Autrement dit, le produit de deux DA à la précision $o(h)$ donne un DA à la précision $o(h)$.
- Pour les matrices $(2,2)$ utiliser la formule d'inverse du cours avec le déterminant, c'est rapide !
- Justifier que les matrices commutent lorsque vous appliquez la formule du binôme
- A la question 3)-a- de l'exercice 4. Il s'agit de résoudre un système d'**inconnue** X (ou d'inconnues $x$et y) , de **paramètre** λ (le statu de ces objets est donc différent). Il faut donc donner pour réponse un ensemble-solution en distinguant les trois cas selon les valeurs de λ. Il ne s'agit pas de distinguer les cas selon les inconnues x, y.
- Une imprécision rencontrée dans la très grande majorité des copies. La formule de A^n de 2) n'est valable que pour $n \in \mathbb{N}^*$. Il faut donc distinguer les cas $n=0$ ou sortir le terme $k=0$ dans la somme dans les questions 4, 5)-a- (l'énoncé vous le demandait), 6) et 7)-b- (il fallait en prendre l'initiative).

Exercice 1 Notons $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^3 x} - \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Sur un voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)} - \frac{1}{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}\\
&= \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^3} - \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^3}\right)\\
&= \frac{1}{x^3}\left(\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^{-3} - \left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^{-3}\right)\\
&= \frac{1}{x^3}\left(1-3\frac{x^2}{6}+o(x^2) - \left(1+3\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right)\\
&= \frac{1}{x^3}\left(-x^2+o(x^2)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-1}{x}}$.

Autre méthode : on réécrit $f(x) = \dfrac{\sin^3 x - \operatorname{sh}^3 x}{\sin^3 x \operatorname{sh}^3 x}$.
Avec les équivalents usuels, l'équivalent du dénominateur est immédiat: $\sin^3 x \operatorname{sh}^3 x \underset{0}{\sim} x^6$.

Pour le numérateur,

$$\begin{aligned}
\sin^3 x - \operatorname{sh}^3 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)^3 - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^4)\right)^3\\
&= \left(x^3 - 3x^2\frac{x^3}{6} + o(x^5)\right) - \left(x^3 + 3x^2\frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)\\
&= -x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Donc $\sin^3 x - \operatorname{sh}^3 x \underset{0}{\sim} -x^5$.

Par quotient, $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-x^5}{x^6} = -\frac{1}{x}$ donc $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x}}$.

NB : pour le numérateur, on pouvait être plus astucieux, $\sin^3 x - \operatorname{sh}^3 x = (\sin x - \operatorname{sh} x)(\sin^2 x + \sin x \operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^2 x)$.
D'une part, $\sin x - \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2}{6}x^3$.
D'autre part, $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$, $\sin x \operatorname{sh} x = x^2 + o(x^2)$ et $\operatorname{sh}^2 x = x^2 + o(x^2)$, donc $\sin^2 x + \sin x \operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^2 x = 3x^2 + o(x^2)$.
Donc $\sin^3 x - \operatorname{sh}^3 x \underset{0}{\sim} -x^5$.

Exercice 2 $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+\sin x)\right)$.

Méthode : pour pouvoir prolonger par continuité, obtenir la dérivabilité et obtenir le terme de position il faut au moins un DL à l'ordre 2.

Pas de ruse, on doit aller à l'ordre 3 pour $x \mapsto \ln(1+\sin x)$.
Au voisinage de 0,

$$\ln(1+\sin x) \quad = \quad \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$, donc

$$
\begin{aligned}
\ln(1+\sin x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+o(x^3)\\
&= x-\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)\\
&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3).
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)\\
&= \mathrm{e}\times\exp\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\right)
\end{aligned}
$$

Or $e^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$, donc

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}\left(1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2\right)^2\right)+o(x^2)\\
&= \mathrm{e}\left(1+-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)x^2\right)+o(x^2)\\
&\boxed{f(x) = \mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x+\frac{7\,\mathrm{e}}{24}x^2+o(x^2)}.
\end{aligned}
$$

f est donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=e$. Le prolongement est alors dérivable et $f'(0)=-\frac{1}{2}e$. Au voisinage de 0, la courbe est **localement** au-dessus de sa tangente (signe de $\frac{7e}{24}x^2$) la droite d'équation $y=\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{2}x$.

Exercice 3 Pour $x>0$, $f(x)=x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

On pose $h=\frac{1}{x}$. $f\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{h}\sqrt{1+h+h^2}e^h$

Au voisinage de 0, $\sqrt{1+u}=1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u)$

donc

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+h+h^2} &= 1+\frac{1}{2}(h+h^2)-\frac{1}{8}(h+h^2)^2+o(h^2)\\
&= 1+\frac{h}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)h^2+o(h^2)\\
&= 1+\frac{h}{2}+\frac{3}{8}h^2+o(h^2)
\end{aligned}
$$

Puis $e^h=1+h+\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{8}h^2+o(h^2)\right)\left(1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(1+\frac{3}{2}h+\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)h^2+o(h^2)\right)\\
&= \frac{1}{h}+\frac{3}{2}+\frac{11}{8}h+o(h)
\end{aligned}
$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{3}{2}+\frac{11}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.
Au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f admet une asymptote Δ d'équation $y=x+\frac{3}{2}$ et la courbe est localement au-dessus de Δ (signe de $\frac{11}{8x}$).

Exercice 4

1) $\boxed{A^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}}$ donc $\boxed{A^2=A+I_2}$. Donc $A^2-A=I_2$ c'est-à-dire $A(A-I_2)=I_2$ et $(A-I_2)A=I_2$

Donc A est inversible avec $\boxed{A^{-1}=A-I_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}}$.

2) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: "$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$".

- Pour $n = 1$, $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie,

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix} \quad \text{(définition de la suite de Fibonacci).} \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}}$.

3) -a- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff \begin{cases} (1-\lambda)x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - \lambda y = 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ (1-\lambda)x + y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - \lambda y = 0 \\ (\lambda^2 - \lambda + 1)y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

On pose $\boxed{\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

<u>Si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\alpha, \beta\}$</u>, on a obtenu un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, c'est un système de Cramer.

Il admet une unique solution: $\boxed{X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

<u>Si $\lambda = \alpha$</u>, $AX = \alpha X \iff x - \alpha y = 0$.

En notant $\mathcal{S}$ l'ensemble-solution du système $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ y \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}}$.

On note $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}}$, $AX_1 = \alpha X_1$.

<u>Si $\lambda = \beta$</u>, $AX = \beta X \iff x - \beta y = 0$.

On a $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ y \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}}$. On note $\boxed{X_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}}$, $AX_2 = \beta X_2$.

-b- $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Le déterminant de P vaut $\det P = \alpha - \beta = -\sqrt{5} \neq 0$ donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$ et $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}}$.

-c- En utilisant une écriture par blocs, $AP = A(X_1|X_2) = (AX_1|AX_2) = (\alpha X_1|\beta X_2)$.

En notant $D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta)$. $PD = (X_1|X_2)\operatorname{diag}(\alpha, \beta) = (\alpha X_1|\beta X_2)$.

Ainsi $\boxed{\text{pour } D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta),\ AP = PD.}$

-d- En multipliant l'égalité $AP = PD$ à droite par P^{-1}, on obtient $A = PDP^{-1}$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$:"$A^n = PD^nP^{-1}$".

- **Initialisation**. $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ et $A^0 = I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, alors au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \quad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

-e- Comme D est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après 3)-d-), $A^n = PD^nP^{-1}$. Après calculs on obtient alors:

$$A^n = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & -\alpha^{n+1}\beta+\alpha\beta^{n+1} \\ \alpha^n-\beta^n & -\alpha^n\beta+\alpha\beta^n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $-\alpha^{n+1}\beta+\alpha\beta^{n+1} = \alpha\beta(-\alpha^n+\beta^n) = \alpha^n-\beta^n$ car $\alpha\beta=-1$ (produit des racines du polynôme du second degré X^2-X-1). De même $-\alpha^n\beta+\alpha\beta^n = \alpha^{n-1}-\beta^{n-1}$.

Finalement $\boxed{A^n = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} \alpha^{n+1}-\beta^{n+1} & \alpha^n-\beta^n \\ \alpha^n-\beta^n & \alpha^{n-1}-\beta^{n-1} \end{pmatrix}}$.

4) On identifie le résultat précédent à celui de la question 2) (valable pour $n \in \mathbb{N}^*$) pour obtenir:

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$.

Pour $n=0$, le membre de droite vaut 0, or $F_0=0$, donc l'expression est valable aussi pour $n=0$.

5) -a- Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

- Si $p=0$, $F_nF_{p+1}+F_{n-1}F_p = F_nF_1+F_{n-1}F_0 = F_n+F_{n-1} = F_{n+1}$.
- On suppose $p \neq 0$. On exploite l'égalité matricielle $A^{n+p} = A^n \times A^p$. Comme tous les exposants p, n, $n+p$, sont non nuls on remplace par l'expression trouvée en 2):

$$\begin{pmatrix} F_{n+p+1} & F_{n+p} \\ F_{n+p} & F_{n+p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{p+1} & F_p \\ F_p & F_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ F_nF_{p+1}+F_{n-1}F_p & \cdots \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit matriciel de droite et en identifiant le coefficient en première colonne, deuxième ligne, il vient $F_{n+p} = F_nF_{p+1}+F_{n-1}F_p$.

On a donc bien: $\boxed{\forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ F_{n+p} = F_nF_{p+1}+F_{n-1}F_p}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}$, $F_{2n+1} = F_{(n+1)+n}$, $(n+1,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ donc d'après 9):

$$F_{2n+1} = F_{n+1}F_{n+1}+F_nF_n = F_{n+1}^2+F_n^2.$$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{2n+1} \text{ s'écrit comme la somme de deux carrés d'entiers}}$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^{2n} &= (A^2)^n = (A+I_2)^n \quad \text{(d'après 1))} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kI_2^{n-k} \quad \text{(binôme de Newton car } A \text{ et } I_2 \text{ commutent)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^k = \binom{n}{0}A^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \quad \text{(d'après 2) car } k \geqslant 1) \end{aligned}$$

Donc d'après 2), car $2n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} F_{2n+1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

En identifiant le coefficient, en première ligne et deuxième colonne, on obtient $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k$.

Puis pour $n=0$, $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}F_k = F_0 = F_{2\times 0}$. Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k}$.

7) -a- Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule:

$$\begin{aligned} I_2 - A^{n+1} &= (I_2-A)\sum_{k=0}^{n}A^k \quad \text{(car } I_2 \text{ et } A \text{ commutent)} \\ &= -A^{-1}\sum_{k=0}^{n}A^k \quad \text{(d'après 1)).} \end{aligned}$$

Et donc en multipliant à gauche par A, $\boxed{I_2+A+A^2+\cdots+A^n = A^{n+2}-A}$.

-b- D'après 7)-a-, $A^{n+2} = A+(I_2+A+A^2+\cdots+A^n) = I_2+A+\sum_{k=1}^{n}A^k$. Donc d'après 2), ici $k \geqslant 1$ et $n+2 \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} F_{n+3} & F_{n+2} \\ F_{n+2} & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

En identifiant les coefficients en première ligne et deuxième colonne et d'après 2), $\boxed{F_{n+2} = 1+\sum_{k=0}^{n}F_k}$.