Exercice 1. Diagonalisation On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est de calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

1) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et λ un paramètre réel.

$$(E_\lambda)\ AX = \lambda X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & \lambda x \\ x & + & 2y & + & z & = & \lambda y \\ x & + & y & + & 2z & = & \lambda z \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} (2-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (2-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

Rem : on pourrait defaçon classique, échelonner, en commençant par un échange de L_1 et L_2 pour avoir le pivot 1 en première position.
Il y a plus astucieux ici en remarquant que chaque colonne à les mêmes coefficients et donc on fait $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.

$$(E_\lambda) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} (4-\lambda)x & + & (4-\lambda)y & + & (4-\lambda)z & = & 0 \\ x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (2-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

- Si $\lambda = 4$,

$$(E_\lambda) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & -2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & -2z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & -2y & + & z & = & 0 \\ & + & y & + & -z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z. \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq 4$, on fait $L_1 \leftarrow \frac{1}{4-\lambda} L_1$,

$$(E_\lambda) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (2-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (2-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & & & = & 0 \\ & & & & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

- Si $\lambda \neq 1$,

$$(E_\lambda) \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

- Si $\lambda = 1$,

$$(E_\lambda) \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_\lambda = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \ / \ z \in \mathbb{R} \right\} & \text{si } \lambda = 4 \\ \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} & \text{si } \lambda = 1 \\ \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} & \text{sinon} \end{cases}}$$

On pose $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$.

2) $\mathcal{S}_\lambda$ est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène donc $\boxed{\mathcal{S}_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})}$.
D'après 1),

$$\mathcal{S}_{\lambda_1} = \mathrm{Vect}\,(X_1) \quad \text{où} \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rem : ce qui prouve autrement que $\mathcal{S}_{\lambda_1}$ est un sev de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$. Donc (X_1) engendre $\mathcal{S}_{\lambda_1}$; de plus (X_1) est libre car $X_1 \neq 0_31$ donc $\boxed{(X_1) \text{ est une base de } \mathcal{S}_{\lambda_1}}$.

$$\mathcal{S}_{\lambda_2} = \text{Vect}(X_2, X_3) \quad \text{où} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc (X_2, X_3) engendre $\mathcal{S}_{\lambda_2}$; de plus (X_2, X_3) est libre car X_2 et X_3 ne sont pas proportionnels donc $\boxed{(X_2, X_3) \text{ est une base de } \mathcal{S}_{\lambda_2}}$.

3) On pose $P = (X_1|X_2|X_3)$. Alors

$$AP = (AX_1|AX_2|AX_3) = (4X_1|X_2|X_3) = (X_1|X_2|X_3)\text{Diag}(4,1,1).$$

Avec $\boxed{D = \text{Diag}(4,1,1) \text{ on a bien } AP = PD}$.

4) $P = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

$$PX = Y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & - & y & & & = & b \\ x & & & - & z & = & c \end{array} \right. \quad L_1 \leftarrow \tfrac{1}{3}(L_1 + L_2 + L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(a+b+c) \\ y = \frac{1}{3}(a-2b+c) \\ z = \frac{1}{3}(a+b-2c) \end{cases}.$$

Le système admet une unique solution donc P est inversible avec $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

5) Comme $AP = PD$ alors $\boxed{D = P^{-1}AP}$ puis par récurrence (laissée au lecteur) : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = P^{-1}A^nP}$.

6) Comme D est diagonale, alors $D^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix}$. Donc

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2

Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

1) Soient $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ dans $\mathbb{R}^3$ et λ réel,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= \left(-(\lambda y + y') - (\lambda z + z'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), -2(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z')\right) \\ &= \left(\lambda(-y-z) + (-y'-z'), \lambda(x+y+z) + (x'+y'+z'), \lambda(-2x'-2y'-z') + (-2x'-2y'-z')\right) \\ f(\lambda u + v) &= \lambda f(u) + f(v). \end{aligned}$$

f est donc linéaire. De plus f va de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

Soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} -y-z & = a \\ x+y+z & = b \\ -2x-2y-z & = c \end{array} \right. \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x & = a+b \\ x+y+z & = a+b \\ z & = c+b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & a+b \\ y & = & -a-2b-c \\ z & = & c+b \end{array} \right.$$

Ce sytème admet toujours une unique solution, ce qui prouve que f est une bijection.

Par conséquent, $\boxed{f \in GL(\mathbb{R}^3)}$.

2) On pose $g = f - \mathrm{Id}$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Ker} g &\Leftrightarrow f(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -y-z-x &= 0 \\ x+y+z-y &= 0 \\ -2x-2y-z-z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x-y-z &= 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ x+z &= 0 \\ -2x-2y-2z &= 0 \qquad = 2L_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = (x, 0, -x) \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon_1 = (1, 0, -1)$ ainsi $F = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ et comme ε_1 n'est pas le vecteur nul, la famille (ε_1) est libre.
Par conséquent, $\boxed{(\varepsilon_1) \text{ est une base de } F}$.

Puis

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g &= \operatorname{Vect}(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)) \\ &= \operatorname{Vect}((-1,1,-2),(-1,0,-2),(-1,1,-2)) \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \text{ puis } C_2 \leftarrow -C_2 \text{ et } C_3 = C_1 \operatorname{Im} g \quad = \operatorname{Vect}((0,1,0),(1,0,2)). \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (1, 0, 2)$. La famille $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre car ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels. Par conséquent, $\boxed{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base de } \operatorname{Im} g}$.

3) -a- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$f^2(x,y,z) = (-(x+y+z)-(-2x-2y-z), (-y-z)+(x+y+z)+(-2x-2y-z), -2(-y-z)-2(x+y+z)-(-2x-2y-z))$

$\boxed{f^2(x,y,z) = (x+y, -x-2y-z, 2y+z)}$

-b- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on additionne le résultat précédent à

$$f(x,y,z) = (-y-z, x+y+z, -2x-2y-z) \qquad Id(x,y,z) = (x,y,z)$$

et on obtient $\boxed{h(x,y,z) = (2x-z, 0, -2x+z)}$.

-c- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u = (x,y,z) \in \operatorname{Ker} h \Leftrightarrow h(u) = (0,0,0) \Leftrightarrow 2x - z = 0 \Leftrightarrow u = (x, y, 2x).$$

Alors $\operatorname{Ker} h = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_2 = (0,1,0)$ et $\varepsilon_3 = (1,0,2)$ (de la question 2)). Par conséquent, $\boxed{(\varepsilon_2, \varepsilon_3) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} h}$.

4) $F = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ et $G = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ donc $F + G = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
Soit u dans $\mathbb{R}^3$ on pose $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u \in F + G &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = u \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{cases} a+c &= x \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \\ b &= y \\ -a+2c &= z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ / \begin{cases} a \quad +c &= x \\ b &= y \\ 3c &= x+z \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet une unique solution, donc tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ se décompose donc de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, ceci prouve que $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}$.

5) D'après 2) et 3)-c-, $\boxed{\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} h} = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
On en déduit que : $\forall u \in R^3$, $g(u) \in \operatorname{Ker} h$ c'est à dire : $\forall u \in R^3$, $h(g(u)) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On déduit $\boxed{h \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}}$.
Or $h \circ g = (f^2 + f + \mathrm{Id}) \circ (f - \mathrm{Id}) = f^3 - \mathrm{Id}$ d'après les règles de calculs dans l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ et car f et Id commutent.
Donc $\boxed{f^3 = \mathrm{Id}}$.

Partie II - Étude du cas général

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^3 = \mathrm{Id}$.
On pose $F = \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{Id})$ et $G = \operatorname{Ker}(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{Id})$.

1) Soit $u \in F \cap G$ alors $\varphi(u) = u$ car $u \in F$ on en déduit que $\varphi^2(u) = \varphi(u) = u$.
Or comme $u \in G$, on a $\left(\varphi^2 + \varphi + Id\right)(u) = 0_E$ c'est-à-dire $\varphi^2(u) + \varphi(u) + Id(u) = 0_E$ ainsi $3u = 0_E$ donc $u = 0_E$ donc $F \cap G \subset \{0_E\}$.
Inversement, $\{0_E\} \subset F \cap G$ car F et G sont des sev de E.

Par conséquent, $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$.

2) Soit $u \in E$.
Montrons que $u_1 \in F$,

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(\varphi^2(u) + \varphi(u) + u\right) \quad \text{donc} \quad \varphi(u_1) = \frac{1}{3}(\underbrace{\varphi^3(u)}_{=u \text{ car } \varphi^3 = Id} + \varphi^2(u) + \varphi(u)) = u_1$$

donc $\varphi(u_1) = u_1$ c'est à dire: $(\varphi - Id)(u_1) = 0_E$ ainsi $u_1 \in \operatorname{Ker}(\varphi - Id)$ donc $\boxed{u_1 \in F}$.

Montrons que $u_2 \in G$,

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(-\varphi^2(u) - \varphi(u) + 2u\right) \quad \text{donc} \quad \varphi(u_2) = \frac{1}{3}(\underbrace{\varphi^3(u)}_{=u \text{ car } \varphi^3 = Id} - \varphi^2(u) + 2\varphi(u)) \quad \text{et} \quad \varphi^2(u_2) = \frac{1}{3}(-\varphi(u) - \underbrace{\varphi^3(u)}_{=u} + 2\varphi^2(u)).$$

On ajoute ces trois égalités, et on obtient: $\left(\varphi^2 + \varphi + Id\right)(u_2) = 0_E$ c'est-à-dire : $u_2 \in \operatorname{Ker}\left(\varphi^2 + \varphi + Id\right)$ donc $\boxed{u_2 \in G}$.

3) Soit $u \in E$. On définit u_1 et et u_2 comme ci dessus, on remarque que $u_1 + u_2 = u$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$ donc $u \in F + G$ où $E \subset F + G$.
Inversement, $F + G \subset E$ car F et G sont des sev de E donc $E = F + G$.
Or d'après II-1), $F \cap G = \{0_E\}$ donc, d'après la caractérisation des sous espaces vectoriels supplémentaires, on en déduit que: $\boxed{F \oplus G = E}$.

4) On pose $p = \frac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi + 2\,\mathrm{Id}\right)$.

-a- - Comme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, par opération dans l'anneau et l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ on a $p \in \mathcal{L}(E)$.
Puis, en utilisant les opérations dans $\mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned} p \circ p &= \frac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi + 2Id\right) o \frac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi + 2Id\right) \\ &= \frac{1}{9}(\underbrace{\varphi^4}_{=\varphi} + \underbrace{\varphi^3}_{=Id} - 2\varphi^2 + \underbrace{\varphi^3}_{=Id} + \varphi^2 - 2\varphi - 2\varphi^2 - 2\varphi + 4Id) \\ &= \frac{1}{9}\left(-3\varphi^2 - 3\varphi + 6Id\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi + 2Id\right) = p. \end{aligned}$$

Donc $p \circ p = p$. Conclusion, d'après la caractérisation des projecteurs, $\boxed{p \text{ est un projecteur de } E}$.

-b- Comme p est un projecteur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - Id)$, donc

$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}\left(\frac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi + 2Id\right) - Id\right) = \operatorname{Ker}\left(\frac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi - Id\right)\right) = \operatorname{Ker}\left(\varphi^2 + \varphi + Id\right)$$

donc $\boxed{\operatorname{Im}(p) = G}$.

Puis montrons que $\operatorname{Ker} p = F$ par double inclusion.

$\subset$: soit u dans $\operatorname{Ker}(p)$ alors

$$\frac{1}{3}\left(-\varphi^2 - \varphi + 2Id\right)(u) = 0_E \quad \text{donc} \quad -\varphi^2(u) - \varphi(u) + 2u = 0_E.$$

Donc en appliquant φ,

$$-\varphi^3(u) - \varphi^2(u) + 2\varphi(u) = \varphi(0_E)$$

donc

$$-u - \varphi^2(u) + 2\varphi(u) = 0_E = -\varphi^2(u) - \varphi(u) + 2u \quad \text{c'est-à-dire} \quad -3u + 3\varphi(u) = 0_E.$$

Donc $u \in \underbrace{\operatorname{Ker}(\varphi - Id)}_{F}$, d'où $\operatorname{Ker}(p) \subset F$.
$\supset$: soit u dans F alors $(\varphi - Id)(u) = 0_E$ donc $\varphi(u) = u$ donc $\varphi^2(u) = \varphi(u) = u$.
Or $p(u) = \frac{1}{3}\left(-\varphi^2(u) - \varphi(u) + 2(u)\right)$ et donc $p(u) = \frac{1}{3}(-u - u + 2u) = 0_E$ donc $u \in \operatorname{Ker}(p)$ d'où $F \subset \operatorname{Ker}(p)$.
Finalement $\boxed{\operatorname{Ker}(p) = F}$.
p étant un projecteur de $E, \operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire : $\boxed{F \oplus G = E}$.

Partie III - Étude d'une équation différentielle

Cette partie est facultative

On cherche dans cette partie les solutions de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle: $(\mathcal{E})\ y''' = y$.
On note dans cette partie E l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \ / \ f''' = f\}$.

1) - Tout d'abord que E est inclus dans $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$.
   - Notons θ la fonction nulle sur R . θ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $\theta''' = \theta$ donc $\theta \in E$ donc $E \neq \emptyset$.
   - Soient f et g dans E et λ réel.
   Par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^3$, $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
   De plus
   $$\begin{aligned}(\lambda f+g)''' &= \lambda f''' + g''' \\ &= \lambda f + g \qquad \text{car } (f,g) \in E^2.\end{aligned}$$
   Ainsi $\lambda f + g \in E$

$\boxed{E \text{ est donc un sous-espace-vectoriel de } \mathcal{C}^3(\mathbb{R})}$.

2) Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = f'$.

-a- Soit f dans E. f est alors de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $f''' = f$ donc f''' est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe $\mathcal{C}^6$ sur $\mathbb{R}$ donc f' est de classe $\mathcal{C}^5$ sur R, or $\varphi(f) = f'$ ainsi $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. De plus $f''' = f$ donc $f'''' = f'$ c'est-à-dire $(\varphi(f))''' = \varphi(f)$ donc $\varphi(f) \in E \cdot \varphi$ est bien une application de E vers lui même.
Puis φ est linéaire car la dérivation est linéaire.
Par conséquent, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

-b- Soit f dans E,
$$\varphi^3(f) = f''' = f \text{ car } f \in E\ .$$
Donc $\boxed{\varphi^3 = \mathrm{Id}_E}$.

3) On pose l'équation différentielle: $(\mathcal{E}_1) \quad y' - y = 0$.

-a- Soit y une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$.
y est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y' = y$ donc y' est continue sur $\mathbb{R}$ donc y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, mais $y' = y$ donc y' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'où y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On recommence, $y' = y$ donc y' est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc y est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. Enfin, $y' = y$ donc $y'' = y' = y$ donc $y''' = y' = y$.
Par conséquent, y est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $y''' = y$ c'est-à-dire, y appartient à E.
Donc, $\boxed{\text{toute solution de } (\mathcal{E}_1) \text{ est élément de } E}$.

-b- $(\mathcal{E}_1)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène.
On pose $a : x \mapsto 1$ et $A : x \mapsto x$ une primitive de a sur $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{L'ensemble-solution est } S_{(\mathcal{E}_1)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^x \end{array} \ / \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$.

-c- Comme toute solution de $(\mathcal{E}_1)$ est élément de E, on reconnait que:
$$y \text{ est solution de } (\mathcal{E}_1) \Leftrightarrow y \in E \quad \text{et} \quad \varphi(y) - y = 0.$$
Ainsi: $S_{(\mathcal{E}_1)} = \mathrm{Ker}(\varphi - Id)$ d'où: $\mathrm{Ker}(\varphi - Id) = \mathrm{Vect}\,(f_1)$ où $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$.
f_1 n'est pas l'application nulle donc la famille (f_1) est libre donc $\boxed{(f_1) \text{ est une base de Ker } (\varphi - Id)}$.

4) On pose l'équation différentielle: $(\mathcal{E}_2) \quad y'' + y' + y = 0$.

-a- Raisonnement similaire à III-2)-a-.

-b- $(\mathcal{E}_2)$ est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène.
On pose $(e) : r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
$\boxed{\text{L'ensemble-solution est } S_{(\mathcal{E}_2)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\frac{-x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{array} \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$.

-c- Comme toute solution de $(\mathcal{E}_2)$ est élément de E, on reconnait que:
$$y \text{ est solution de } (\mathcal{E}_2) \Leftrightarrow y \in E \quad \text{et} \quad \varphi^2(y) + \varphi(y) + y = 0.$$
Ainsi: $S_{(\mathcal{E}_2)} = \mathrm{Ker}(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{Id})$ d'où: $\mathrm{Ker}(\varphi^2 + \varphi + \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ où $f_1 : x \mapsto e^{\frac{-x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ et $f_2 : x \mapsto e^{\frac{-x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.
f_1 et f_2 ne sont pas proportionnelles donc la famille (f_1, f_2) est libre donc $\boxed{(f_1, f_2) \text{ est une base de Ker } (\varphi^2 + \varphi + \mathrm{Id})}$.

5) On reconnait que $S_{\mathcal{E}} = E$.
Par ailleurs, comme φ est un endomorphisme de E vérifiant $\varphi^3 = \mathrm{Id}$, d'après la partie B, $\mathrm{Ker}(\varphi - Id)$ et $\mathrm{Ker}\left(\varphi^2 + \varphi + Id\right)$ sont supplémentaires dans E. Donc
$$E = \mathrm{Ker}(\varphi - Id) \oplus \mathrm{Ker}\left(\varphi^2 + \varphi + ld\right) = \mathrm{Vect}\,(f_1) \oplus \mathrm{Vect}\,(f_2, f_3) = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2, f_3)\,.$$
Par conséquent:
$$\boxed{S_{\mathcal{E}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^x + \mu e^{\frac{-x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \nu e^{\frac{-x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{array} \ / \ (\lambda,\mu,\nu) \in \mathbb{R}^3 \right\}}.$$