Exercice 1
Dans tout ce problème E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
On note 0_E le neutre de E, $0_{\mathcal{L}(E)}$ l'application nulle de E et Id_E l'application identité de E.
Si f est un endomorphisme de E, on note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

Partie I - Premier exemple: $E = \mathbb{R}^3$

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$. On pose l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, -x - y + z, z) \end{array}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f^2$. Puis montrer que $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f^2$ sont supplémentaires dans E.
3) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Puis vérifier que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im} f^2$. Déduire alors, que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Partie II - Deuxième exemple: $E = \mathbb{R}_2[X]$

Dans cette partie $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' + \widetilde{P'}(0)X \end{array}$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer $\operatorname{Im} f^2$, $\operatorname{rg} f^2$ puis $\operatorname{Ker} f^2$. On donnera une base du noyau et une base de l'image.
3) Montrer que $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{Ker} f^2$ sont supplémentaires dans E.
4) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Puis vérifier que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \operatorname{Im} f^2$. Déduire alors, que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Partie III - Cas général

On revient au cas général où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul $0_{\mathcal{L}(E)}$ et vérifiant $f^3 = f^2$.
On pose $F = \operatorname{Ker} f^2$ et $G = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

1) Démontrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
2) Vérifier que f^2 est un projecteur.
3) Montrer que l'on a $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
4) En déduire que $F \oplus G = E$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E.

1) Montrer que la suite $(\operatorname{Im} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante au sens de l'inclusion c'est-à-dire :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k.$$
Montrer que la suite $(\operatorname{Ker} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante au sens de l'inclusion c'est-à-dire :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}.$$
2) Montrer que si pour un entier k, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$ alors : $\forall m \geqslant k$, $\operatorname{Ker} f^m = \operatorname{Ker} f^k$.
3) Montrer que si pour un entier k, $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$ alors : $\forall m \geqslant k$, $\operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^k$.
4) **Facultatif** On suppose que E est de dimension finie n.
Soit s (en supposant qu'il existe) le plus petit entier k tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
Soit r (en supposant qu'il existe) le plus petit entier k tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$.

-a- Montrer que les entiers r et s existent et sont inférieurrs ou égaux à n.

-b- Montrer que si $s \leqslant r$, alors $\operatorname{Im} f^s = \operatorname{Im} f^r$, puis $s = r$.

-c- Montrer que si $r \leqslant s$, alors $\operatorname{Ker} f^s = \operatorname{Ker} f^r$, puis $s = r$.

-d- Conclure que $r = s$.

5) $\boxed{\textbf{Archi facultatif}}$ On suppose toujours que $\boxed{E \text{ est de dimension finie } n}$.

-a- On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k = \dim(\operatorname{Im} f^k) - \dim(\operatorname{Im} f^{k+1})$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k = \dim(\operatorname{Ker} f^{k+1}) - \dim(\operatorname{Ker} f^k)$.
On souhaite prouver dans la suite que cette suite (δ_k) *est décroissante*

-b- Justifier l'existence d'une sous-espace vectoriel D_k tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1} \oplus D_k$ et déterminer $\dim D_k$.

-c- Établir que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2} + f(D_k)$.

-d- En déduire que $\delta_{k+1} \leqslant \delta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.