Exercice 9. ($\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer à l'aide d'un contre-exemple, qu'en général $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2) Montrer que: $F \cup G$ sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$

Correction -

1) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $F = \mathrm{Vect}((1,0))$ et $G = \mathrm{Vect}((0,1))$. $(1,0)$ et $(0,1)$ appartiennent à $F \cup G$ et poutant $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ n'appartient pas à $F \cup G$ car n'appartient ni à F ni à G.
2) $\Leftarrow$: si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ est un sev de E. Idem si $G \subset F$.
$\Rightarrow$: supposons $F \cup G$ un sev de E.
   - Si $F \subset G$, c'est fini.
   - Sinon, montrons que $G \subset F$. Soit $x_G \in G$. Comme $F \not\subseteq G$, posons $x_F \in F$ tel que $x_F \notin G$.
   Donc x_F et x_G appartiennent à $F \cup G$, et comme $F \cup G$ est un sev de $F \cup G$ alors $x_F + x_G \in F \cup G$.
   Deux cas : si $x_F + x_G \in G$, alors comme $x_G \in G$ et G sev de E il vient $x_F = (x_F + x_G) - x_G \in G$ absurde.
   C'est donc que $x_F + x_G \in F$, alors comme $x_F \in F$ et F sev de E il vient $x_G = (x_F + x_G) - x_F \in F$. Donc $x_G \in F$. On a donc prouvé l'inclusion, $G \subset F$.

   La deuxième implication est donc prouvée.

Exercice 11. ($**$) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sev de E. On pose $A = E \setminus F$.

1) Montrer que : $\forall x \in F$, $\forall y \in A$, $x + y \in A$.
2) En déduire que si $F \neq E$, alors $\mathrm{Vect}(A) = E$.

Correction - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sev de E. On pose $A = E \setminus F$.

1) Soient $x \in F$, $y \in A$.
Par l'absurde, supposons $x + y \notin A$ c'est-à-dire $x + y \in F$. Alors comme F est un sev de E, $(x + y) - x = y \in F$ ce qui est absurde car $y \in A$.
Donc $x + y \in F$.
2) Supposons $F \neq E$. Montrons que $\mathrm{Vect}(A) = E$.
Clairement, $\mathrm{Vect}(A) \subset E$.
Inversement, soit $x \in E$. Par l'absurde supposons que $x \notin \mathrm{Vect}(A)$.
Notons que $E = F \cup A$, donc $x \in F$ ou $x \in A$.
Si $x \in A$, alors $x \in \mathrm{Vect}(A)$.
Si $x \in F$. Comme $F \neq E$, on peut poser $y \in E \setminus F = A$. Et donc d'après 1), $x + y \in A$. Donc
$$x = \underbrace{(x+y)}_{\in A} - \underbrace{y}_{\in A} \in \mathrm{Vect}(A).$$
On a donc prouvé la deuxième inclusion.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Vect}(A) = E}$.

Exercice 13. ($\heartsuit$) On définit $F = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (1,1,1,1)$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base
2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Correction -

1) $F = \mathrm{Vect}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ t = -x - y - z\} \\ &= \{(x,y,z,-x-y-z) \in \mathbb{R}^4 \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0,0,-1) + y(0,1,0,-1) + z(0,0,1,-1) \ / \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \end{aligned}$$
$$\boxed{G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \text{ où } v_1 = (1,0,0,-1),\ v_2 = (0,1,0,-1),\ v_3 = (0,0,1,-1)}.$$
Donc $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2) **Méthode 1**: à l'aide de la définition.
Tout d'abord $F+G \subset \mathbb{R}^3$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donc $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Pour l'inclusion inverse, soit $w=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$,

$$w=\underbrace{\alpha u}_{\in F}+\underbrace{\beta v_1+\gamma v_2+\delta v_3}_{\in G} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} \alpha & +\beta & & & = x & \\ \alpha & & +\gamma & & = y & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ \alpha & & & +\delta & = z & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta & = t & L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} \alpha & +\beta & & & = & x & \\ & -\beta & +\gamma & & = & y-x & \\ & -\beta & & +\delta & = & z-x & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ & -2\beta & -\gamma & -\delta & = & t-x & L_4 \leftarrow L_4-2L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllllll} \alpha & +\beta & & & = & x & \\ & -\beta & +\gamma & & = & y-x & \\ & & -\gamma & +\delta & = & z-y & \\ & & -3\gamma & -\delta & = & t-2y+x & L_4 \leftarrow L_4-3L_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llllll} \alpha & +\beta & & & = & x \\ & -\beta & +\gamma & & = & y-x \\ & & -\gamma & +\delta & = & z-y \\ & & & -4\delta & = & t+y+x-3z \end{array}\right.$$

Ce système est échelonné, compatible, de rang 4 égal le nombre d'inconnues donc ce système admet une unique solution. La décomposition envisagée existe et est unique.
Finalement, $\boxed{F\oplus G=\mathbb{R}^4}$.
Méthode 2: à l'aide de la caractérisation.

- $F+G=\mathrm{Vect}(u,v_1,v_2,v_3)$. On pose alors:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix} \quad C_2\leftarrow -C_2+C_1 \quad \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&2&-1&-1\end{pmatrix} \quad C_3\leftarrow -C_3+C_2$$

$$\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\1&2&3&-1\end{pmatrix} \quad C_4\leftarrow \tfrac{1}{4}(-C_4+C_3) \quad \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&2&3&1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_1\leftarrow C_1-C_4\\ C_2\leftarrow C_2-C_4\\ C_3\leftarrow C_3-C_4\end{array}$$

$$\underset{C}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2\leftarrow C_2-C_3\\ C_1\leftarrow C_1-C_3\end{array} \quad \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad C_1\leftarrow C_1-C_2 \quad \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

  On pose alors $\varepsilon_1=(1,0,0,0)$, $\varepsilon_2=(0,1,0,0)$, $\varepsilon_3=(0,0,1,0)$, $\varepsilon_4=(0,0,0,1)$. Alors $F+G=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ donc $F+G=\mathbb{R}^4$.
- Tout d'abord $\{(0,0,0,0)\}\subset F\cap$ car F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$ donc contiennent $(0,0,0,0)$.
  Pour l'inclusion inverse, soit $w\in F\cap G$. Comme $w\in F$, posons $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $w=\lambda u$ alors $w=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$ et $w\in G$ donc $\lambda+\lambda+\lambda+\lambda=0$ donc $4\lambda=0$ donc $\lambda=0$. Donc $w=0_{\mathbb{R}^4}$.
  Finalement, $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

La caractérisatio, est prouvée, donc $\boxed{F\oplus G=\mathbb{R}^4}$.

Exercice 15 Soit $F=\{P\in\mathbb{R}[X]\ /\ \widetilde{P}(3)=0 \quad \text{et} \quad \widetilde{P}(5)=0\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2) Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction -

1)
   - $F\subset\mathbb{R}[X]$.
   - $F\neq\emptyset$ car par exemple $(X-3)(X-5)\in F$.
   - Soit $(P,Q)\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors:

$$(\widetilde{\lambda P+Q})(3)=\lambda\widetilde{P}(3)+\widetilde{Q}(3)=0 \qquad (\widetilde{\lambda P+Q})(5)=\lambda\widetilde{P}(5)+\widetilde{Q}(5)=0.$$

2) Tout d'abord, $F+\mathbb{R}_1[X]\subset R[X]$ car F, $\mathbb{R}_1[X]$ étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ alors $F+\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
Inversement, soit $P\in\mathbb{R}[X]$, on cherche $Q\in F$ et $R\in\mathbb{R}_1[X]$ tel que $P=Q+R$.
Comme $Q\in F$, alors Q s'écrit $Q=(X-3)(X-5)Q_1$ avec $Q_1\in\mathbb{R}[X]$ et $R=\alpha X+\beta$ où $(\alpha\beta)\in\mathbb{R}^2$ et donc: $P=(X-3)(X-5)Q_1+\alpha X+\beta$. On reconnaît alors la division euclidienne de P par $(X-3)(X-5)$ où Q_1 est le quotient et R est le reste. Une telle décomposition existe et est unique. On a donc démontré:

$$\forall P\in\mathbb{R}[X], \quad \exists!(Q,R)\in F\times\mathbb{R}_1[X]\ /\ P=Q+R.$$

Donc $F\oplus\mathbb{R}_1[X]=\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17. $(**)$ Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que si $F+H=G+H$, $F\cap H=G\cap H$ et $F\subset G$ alors $F=G$.
2) Montrer, à l'aide d'un contre-exemple que le résultat n'est plus valable si on enlève l'hypothèse $F\subset G$.

Correction -

1) On suppose $F+H=G+H$, $F\cap H=G\cap H$ et $F\subset G$.
Pour montrer que $F=G$, il suffit de prouver $G\subset F$ car on a déjà l'autre inclusion.
Soit $g\in G$, alors $g=g+0_E\in G+H$. Or $G+H=F+H$ donc posons $f\in F$ et $H\in H$ tel que: $g=f+h$.
Puis comme $F\subset G$ et $f\in F$ alors $f\in G$. D'où: $h=\underbrace{g}_{\in G}-\underbrace{f}_{\in G}\in G$. car G est stable par combinaisons linéaires.
Or $h\in H$ d'où $h\in G\cap H$. Or $G\cap H=F\cap H$, par conséquent $h\in F\cap H$, en particulier $h\in F$. Enfin: $g=\underbrace{f}_{\in F}+\underbrace{h}_{\in F}\in F$.
Finalement, $g\in F$. Et l'autre inclusion est prouvée, d'où l'égalité $\boxed{F=G}$.

2) Dans $\mathbb{R}^2$ on pose $F=\text{Vect}(u)$, $G=\text{Vect}(v)$, $H=\text{Vect}(w)$ où $u=(1,0)$, $v=(0,1)$, $w=(1,1)$. Alors: $F+H=G+H=\mathbb{R}^2$, $F\cap H=G\cap H=\{(0,0)\}$. Dans ce cas $F\neq G$, aucune des inclusions n'est vérifiée.

Exercice 21. $(**)$Familles de $\mathbb{R}[X]$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient A et B deux polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constants et premiers entre eux.
Montrer que la famille $(A^kB^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}$.
Indication : raisonner par l'absurde.

Correction - Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$(*)\quad \lambda_0A^0B^n+\lambda_1A^1B^{n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}A^{n-1}B^1+\lambda_nA^nB^0=0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine de A. Alors comme A et B ne sont pas premiers entre eux α n'est pas racine de B, sans quoi A et B admettraient un diviseur commun non constant ($X-\alpha$ si $\alpha\in\mathbb{R}$ ou $X^2-2\text{Re}(\alpha)X+|\alpha|^2$ si $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$).
On évalue alors $(*)$ en α, tous les termes sont nuls car α est racine de A sauf le premier, donc $\lambda_0B^n(\alpha)=0$ donc $\lambda_0=0$.
Donc $(*)$ devient :

$$(**)\quad \lambda_1A^1B^{n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}A^{n-1}B^1+\lambda_nA^nB^0=0_{\mathbb{R}[X]}.$$

On note m la multiplicité de α, on peut factoriser $(**)$ par $(X-\alpha)^m$, et on évalue en α. Tous les termes sont nuls, sauf le premier, et on obtient $\lambda_1=0$.
De proche en proche, on obtient tous les scalaires nuls.