

Exemples d'applications linéaires

Exercice 1. (♥) Montrer que les applications suivantes sont linéaires. En déterminer l'image et le noyau. Puis déterminer si ces applications sont injectives, surjectives, bijectives.

$$1) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x - 2y, 3y)$$

$$6) f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \\ z \mapsto \operatorname{Re}(z), \quad \mathbb{C} \text{ vu comme } \mathbb{R}\text{-e.v.}$$

$$2) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + 2y, x - y, 3x + y)$$

$$7) f: \mathbb{R}_6[X] \rightarrow \mathbb{R}_6[X] \\ P \mapsto P'$$

$$3) f: \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u \text{ converge}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$8) f: \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C} \\ P \mapsto \tilde{P}(2)$$

$$4) f: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \varphi(6)$$

$$9) f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5) f: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ \varphi \mapsto \varphi' - 2\varphi$$

Exercice 2. (*) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit les applications φ et ψ par

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = f' \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E .
- 2) Exprimer $\varphi \circ \psi$ et $\psi \circ \varphi$.
- 3) Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité de u et v .

Exercice 3. (*) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit l'application f par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(X + 1) - P(X).$$

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
- 3) -a- Déterminer $\operatorname{Im} f$ dans le cas $n = 3$.
-b- Déterminer $\operatorname{Im} f$ dans le cas général.

Exercice 4. (***) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction définie sur E par:

$$\forall f \in E, \quad u(f) = F \quad \text{où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = xf(x).$$

- 1) Montrer que u est un endomorphisme de E .
- 2) Montrer que u est injective.
- 3) Montrer que $\operatorname{Im} u = \{f \in E / f(0) = 0 \text{ et } f \text{ dérivable en } 0\}$.

Exercice 5. (♥) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Psi: E \rightarrow E$ et $f \mapsto f'' - 4f' + 4f$

- 1) Montrer que Ψ est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer le noyau de Ψ en donner une base.

Exercice 6. (*) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\Phi_k : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f^{(k)}(0) \end{array} .$$

- 1) Montrer que Φ_k est linéaire.
- 2) Montrer que (Φ_0, \dots, Φ_n) est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Exercices théoriques

Exercice 7. (♡) Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)}$ si et seulement si $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.

Exercice 8. (♡) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

- 1) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
- 2) On suppose ici que $f \circ g = \text{Id}_E$. Montrer que $\text{Ker } f = \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

Exercice 9. (*) Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Soient $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$ (i.e. f et g commutent). Montrer que le noyau et l'image de f sont stables par g .

Exercice 10. (*) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

- 1) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \Leftrightarrow \text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$
- 2) $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \Leftrightarrow E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

Exercice 11. (*) Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- 1) Montrer que f est bijective en exhibant sa réciproque.
- 2) Montrer que $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. En déduire une inclusion entre $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.
- 3) Prouver de même une inclusion entre $\text{Im}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.
- 4) Montrer que $E = \text{Im}(f - \text{Id}_E) + \text{Im}(f - 2\text{Id}_E)$. Puis que $E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$.
- 5) Déduire de ce qui précède que $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 12. (*) Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 + 2\text{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- 1) Montrer que $f \in \text{GL}(E)$ et exprimer sa réciproque à l'aide de f et de ses itérées.
- 2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$ alors $f - \lambda \text{Id}_E$ est inversible.

Exercice 13. (***) Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}_E$. Montrer que

$$E = \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - j^2 \text{Id}_E).$$

Exercice 14. (***) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires.

- 1) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
- 2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ avec x et y non nuls, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
- 3) Montrer alors que f est une homothétie vectorielle.

Projecteurs et symétries

Exercice 15. (♥) Montrer que l'application $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un projecteur. En déterminer ses éléments caractéristiques.

$$(x, y) \mapsto (4x - 6y, 2x - 3y)$$

Exercice 16. (♥)

- 1) Dans \mathbb{R}^2 on pose $E_1 = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, -1)$ et $\varepsilon_2 = (2, 1)$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- 2) Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose $E_1 = \mathbb{R}_1[X]$ et $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \tilde{P}(1) = \tilde{P}(2) = 0\}$. Déterminer l'expression de la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .

Exercice 17. (♥) Montrer que l'application $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

$$(x, y) \mapsto (-3x + 2y, -4x + 3y)$$

Exercice 18. (*) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

- 1) Montrer que $p \circ q = p \Leftrightarrow \text{Ker } q \subset \text{Ker } p$.
- 2) Montrer que $p \circ q = q \Leftrightarrow \text{Im } q \subset \text{Im } p$.
- 3) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_E$.

Exercice 19. (*) Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel, p un projecteur et f un endomorphisme de E . Montrer que p et f commutent si et seulement si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f .

Exercice 20. (*) Suite de l'exercice 11

Rappel : E est un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- 1) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et des projecteurs p et q tels que
$$\begin{cases} p = \lambda(f - \text{Id}_E) \\ q = \mu(f - 2\text{Id}_E) \\ f = 2p + q \end{cases} .$$
- 2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer f^k en fonction de p, q .

Exercice 21. (**) Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, p un projecteur de E et $q = \text{Id}_E - p$ le projecteur associé à p . On pose

$$G = \{g \in \mathcal{L}(E) / \exists u \in \mathcal{L}(E), g = u \circ p\} \quad H = \{h \in \mathcal{L}(E) / \exists v \in \mathcal{L}(E), h = v \circ q\}.$$

Montrer que $G \oplus H = \mathcal{L}(E)$.

Formes linéaires

Exercice 22. (♥) On pose $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + \dots + x_n = 0\}$.

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et déterminer un supplémentaire de H .

Exercice 23. (*) On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que φ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \text{Ker } \varphi$.

$$f \mapsto f(0)$$