Parité-Périodicité

Exercice 1. (♡) Soit $f \in \mathcal{C}([-a,a],\mathbb{R})$ où $a > 0$.

1) Montrer que si f est paire: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$

2) Montrer que si f est impaire: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Exercice 2. (♡) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction T-périodique.

1) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. A l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\,\mathrm{d}t.$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire, à l'aide de la relation de Chasles, que $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 3. (♡) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$

Exercice 4. ($*$) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ non nulle telle que $f(0) = 0$.

1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que

$$\forall x \in [0,1], \quad f^2(x) \leqslant x \int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

2) Montrer: $\dfrac{\displaystyle\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 (f(t))^2\,\mathrm{d}t} \geqslant 2.$

Divers

Exercice 5. (♡) Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que : $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f$. Montrer que $f : x \mapsto 0$ ou $f : x \mapsto 1$.

Exercice 6. ($*$) Soit f continue sur $[0,1]$ et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe dans $[0,1]$.

Exercice 7. (♡) Soit f continue sur le segment $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ telle que $f(c) = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 8. ($*$) Soient f et g continues sur le segment $[a,b]$ telles que g est positive.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 9. ($**$) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 10. ($**$) Montrer que pour tout $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha<\beta$, on a $\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \frac{2}{\alpha}$.

Suites définies par une intégrale

Exercice 11. ($*$) On définit pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^\pi \frac{\sin x}{n+x}\,\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de I_n. Déterminer un équivalent de I_n. [On se souviendra que pour déterminer un équivalent, on peut tenter d'encadrer par deux suites qui admettent un équivalent commun.]

Exercice 12. ($\heartsuit$) On définit pour $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

1) Calculer I_0, I_1, I_2.
2) Prouver que la suite (I_n) est monotone.
3) Montrer alors que (I_n) converge.
4) Puis établir que (I_n) converge vers 1. [On pourra prouver que $|I_n-1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$].
5) Vérifier que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
6) Montrer que $\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (on utilisera l'inégalité classique: $\forall u\in\mathbb{R}$, $\ln(1+u)\leqslant$??). En déduire que:
$$I_n = 1-\frac{\ln 2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 13. ($**$)mais un grand classique...
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 14. ($*$) Soit f continue sur $[0,1]$ et $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer la limite de $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Utiliser ce qui précède pour déterminer la limite et un équivalent de $J_n=\int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 15. ($*$) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On découpera l'intégrale sur $[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon]$ *et* $[\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}]$.

Fonction définie par une intégrale

Exercice 16. ($*$) Déterminer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$
4) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 t^2\sqrt{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17. $(*)$ Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^t \ln t \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x(\mathrm{e}-1)\ln x$.

Exercice 18. $(**)$ Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x} \ln(\ln t)\,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} x\ln(\ln x)$.

Exercice 19. $(***)$ Soient x et a deux réels tels que : $x > a > \mathrm{e}$. Montrer que : $\displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}$.

Exercice 20. $(*)$ On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\operatorname{Arctan} t}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f. Étudier la parité de f, puis son signe.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 21. $(*)$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Étudier la parité de f.

3) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.

4) En déduire les variations de f.

5) À l'aide d'un encadrement, déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

Exercice 22. $(**)$ Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$.

Exercice 23. $(*)$ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer l'expression de g'.

Exercice 24. $(*)$ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On note encore F ce prolongement.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

3) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

Sommes de Riemann

Exercice 25. $(\heartsuit)$ Calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivants

1) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 \frac{k\pi}{n}$

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3n+2k}$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3}$

5) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 26. $(*)$ Calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivants

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$

2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 27. ($\heartsuit$) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer l'inégalité $\left|\int_0^1 f\right| \leqslant \int_0^1 |f|$ à l'aide sommes de Riemann.

Exercice 28. ($*$) En faisant apparaitre une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Exercice 29. ($***$) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que f est positive.
Calculer la limite de $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{1+k}{n}\right)$.

Formule de Taylor

Exercice 30. ($\heartsuit$) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

2) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 31. ($\heartsuit$) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$. Montrer que: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \cos x$.

Exercice 32. ($*$) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 33. ($**$) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que f et f'' soient bornées. On pose
$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \qquad M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|.$$

1) Déterminer l'existence de M_0 et M_2.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $h > 0$,
$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

3) En déduire l'existence de M_1 et prouver que
$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 34. ($**$) Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0).$$
Calculer la limite de la suite (S_n).

Exercice 35. ($***$) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$.
On commencera par linéariser $\sin^2 x$ puis on transformera l'expression à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2.