

Exercice 2. (♥) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer $\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Correction - D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \left(\int_a^b 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \frac{1}{x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b-a} \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \sqrt{b-a} \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{\sqrt{ab}} \quad \text{donc } \int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Or les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne sont pas proportionnelles, donc il n'y a pas égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Donc $\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice 3. (*) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 non nulle telle que $f(0) = 0$.

1) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$, montrer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f^2(x) \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt.$$

2) Montrer: $\frac{\int_0^1 (f'(t))^2 dt}{\int_0^1 (f(t))^2 dt} \geq 2$.

Correction -

1) Soit $x \in [0, 1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x)$. Puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \left(\int_0^x 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \left(\int_0^x (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On élève au carré, cette inégalité où les deux membres sont positifs, pour obtenir $f^2(x) \leq x \int_0^x (f'(t))^2 dt$.

2) On en déduit pour $x \in [0, 1]$, $f^2(x) \leq x \int_0^1 (f'(t))^2 dt$ car $(f')^2 \geq 0$ et d'après la relation de Chasles.

On intègre cette inégalité par rapport à x ,

$$\int_0^1 f^2(x) dx \leq \int_0^1 x dx \int_0^1 (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (f'(t))^2 dt.$$

On peut donc diviser par $\int_0^1 f^2(x) dx$ qui est non nulle par application du théorème de nullité de l'intégrale (car f^2 est positive, continue et il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f^2(a) > 0$ car f est non nulle), on obtient l'inégalité voulue.

Exercice 6. (*) Soit f continue sur $[0, 1]$ et telle que $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe dans $[0, 1]$.

Correction - Posons pour $x \in [0, 1]$, $g(x) = f(x) - x$. Il s'agit de prouver que g s'annule.

Remarquons que: $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 0$.

g est continue sur $[0, 1]$, comme combinaison linéaire de f et $x \mapsto x$ qui le sont.

Méthode 1 : où on utilise le TVI. Par l'absurde supposons que g ne s'annule pas, alors g garde un signe constant. En effet si au contraire, g change de signe on peut poser α et β réels tels que $g(\alpha) \leq 0$ et $g(\beta) \geq 0$. Et comme par ailleurs g est continue sur $[0, 1]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule entre α et β .

Comme donc, g garde un signe constant, alors $g \geq 0$ (ou $g \leq 0$). Comme par ailleurs, $\int_0^1 g(t) dt = 0$ et $0 < 1$, alors d'après le théorème de nullité de l'intégrale, g est la fonction nulle. Ce qui est absurde, car on a supposé que g ne s'annule pas (même raisonnement pour le cas $g \leq 0$).

Donc g s'annule, donc f admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.

Méthode 2 : où on utilise le théorème de Rolle. On pose G une primitive de g sur $[0, 1]$, alors $G(1) - G(0) = \int_0^1 g(x) dx = 0$ donc $G(1) = G(0)$. De plus G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, alors il existe $c \in]0, 1[$ tel que $G'(c) = 0$ c'est-à-dire $g(c) = 0$.

Exercice 8. (*) Soient f et g continues sur le segment $[a, b]$ telles que g est positive.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ telle que $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$.

Correction - Premier cas : si g est la fonction nulle ou si $a = b$ alors $\int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b g(t) dt = 0$ et donc tout c convient.

Second cas : supposons que g n'est pas la fonction nulle et $a < b$.

f est continue sur le segment $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$ où m, M sont deux réels.

Donc pour $t \in [a, b]$, comme $g(t) \geq 0$ alors

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t).$$

Donc en intégrant bornes croissantes,

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt.$$

On divise par $\int_a^b g(t) dt$ qui est strictement positive par application du théorème de nullité de l'intégrale (g est continue, $a < b$, $g \geq 0$, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) > 0$) alors

$$m \leq \frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} \leq M.$$

Et comme $[m, M] = f([a, b])$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\frac{\int_a^b f(t)g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} = f(c)$ c'est-à-dire $\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$.

Exercice 9. (***) Montrer que : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Correction - Rem : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ correspond à l'intégrale du prolongement par continuité de $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, ce prolongement est continu sur le segment $[0, 1]$.

L'inégalité à prouver découle de la décroissance de la fonction g sur $[0, \pi]$.

- f est décroissante sur $[0, \pi]$. Etudier le signe de la dérivée de f , $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$. On étudie le signe du numérateur en étudiant les variations de $x \mapsto x \cos x - \sin x$.

- Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) \geq f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ puis on intègre bornes croissantes, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \geq \frac{\pi}{2} \frac{2}{\pi} = 1$.

Pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $f(x) \leq f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$ puis on intègre bornes croissantes, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2} \frac{2}{\pi} = 1$.

On obtient les inégalités strictes, en appliquant le théorème de nullité de l'intégrale plutôt que la croissance de l'intégrale (*juste de la rédaction*).

- Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 10. (***) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha < \beta$, on a $\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{\alpha}$.

Correction - Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha < \beta$. On pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v(t) = \sin(t) & v'(t) = \cos(t) \end{cases}$ alors u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{t} \cos(t) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &= -\frac{1}{\beta} \cos(\beta) + \frac{1}{\alpha} \cos(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \underbrace{\frac{1}{|\beta|} |\cos(\beta)|}_{\leq \frac{1}{\beta}} + \underbrace{\frac{1}{|\alpha|} |\cos(\alpha)|}_{\leq \frac{1}{\alpha}} + \underbrace{\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \right|}_{\leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt} \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} + \left[-\frac{1}{t} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{2}{\alpha} \end{aligned}$$

Donc $\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{\alpha}$.

Exercice 14. (*) Soit f continue sur $[0, 1]$ et $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

- 1) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- 2) On suppose de plus f de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer la limite de $(nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Utiliser ce qui précède pour déterminer la limite et un équivalent de $J_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t}$.

Correction - Soit f continue sur $[0, 1]$ et $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, par majoration en valeur absolue,

$$0 \leq |u_n| \leq \int_0^1 |t^n| |f(t)| dt = \int_0^1 t^n |f(t)| dt.$$

Or f , donc $|f|$ aussi est continue sur le segment $[0, 1]$ donc est bornée. Posons, $M = \max_{[0,1]} |f|$. Donc pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq M$ et donc $t^n |f(t)| \leq Mt^n$. Par croissance de l'intégrale, il vient:

$$0 \leq |u_n| \leq M \int_0^1 t^n dt = \frac{M}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{\lim u_n = 0}$.

- 2) On suppose de plus f de classe \mathcal{C}^1 .

On pose $\begin{cases} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v'(t) = t^n & v(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1} \end{cases}$ alors u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$,

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} f(t) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 f'(t) t^{n+1} dt \\ &= \frac{1}{n+1} f(1) - \frac{1}{n+1} \int_0^1 f'(t) t^{n+1} dt. \end{aligned}$$

Donc $nu_n = \frac{n}{n+1} f(1) - \frac{n}{n+1} \int_0^1 f'(t) t^{n+1} dt$. Or, par majoration en valeur absolue,

$$0 \leq \left| \int_0^1 f'(t) t^{n+1} dt \right| \leq \int_0^1 |f'(t)| t^{n+1} dt = \int_0^1 |f'(t)| t^{n+1} dt.$$

Or, comme en 1), on prouve $\int_0^1 |f'(t)| t^{n+1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Puis $\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc par opérations sur les limites, $\boxed{nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)}$.

- 3) On pose $J_n = \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t}$. On a $J_n = u_n$ avec $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$. Alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. D'après 1), $\boxed{\lim J_n = 0}$.

D'après 2), $nJ_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1) = 2$ donc $nJ_n \sim_{+\infty} 2$ donc $\boxed{J_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n}}$.

Exercice 16. (*) Déterminer les limites suivantes:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4} dt$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 t^2 \sqrt{1+x^2 t^2} dt$.

Correction -

- 1) Soit $x > 0$, $t \in [x, 2x]$. L'application $\frac{1}{\ln}$ étant décroissante sur \mathbb{R}_+^* , alors $\frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x)}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(2x)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(x)} \quad \text{donc} \quad \frac{x}{\ln(2x)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \frac{x}{\ln(x)}.$$

Or $\frac{x}{\ln(2x)} = \frac{x}{\ln(2) + \ln(x)} \sim_{+\infty} \frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées et $\frac{x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc, par théorème d'encadrement

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)} = 0}.$$

2) Soit $x > 0$. On pose $\begin{cases} u(t) = \frac{1}{t} & u'(t) = -\frac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t) & v(t) = -\cos(t) \end{cases}$ alors u et v sont de classe C^1 sur $[x, 2x] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$I_n = \left[-\frac{1}{t} \cos(t) \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ = -\frac{1}{2x} \cos(2x) + \frac{1}{x} \cos(x) - \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Puis

- $0 \leq \left| \frac{1}{2x} \cos(2x) \right| = \frac{1}{2x} |\cos(2x)| \leq \frac{1}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

Donc par théorème d'encadrement $\frac{1}{2x} \cos(2x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

- De même $\frac{1}{x} \cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

- Puis, par majoration en valeur absolue puis croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \left| \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{2x} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{x^2} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc par opérations sur les limites, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt = 0}$

3) Soit $x > 0$, $t \in [x, 2x]$, alors

$$\ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(2x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+16x^4} \leq \frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{1+x^4}.$$

Donc comme toutes les quantités sont positives, on fait le produit puis on intègre bornes croissantes,

$$\frac{\ln x}{1+16x^4} \leq \frac{\ln t}{1+t^4} \leq \frac{\ln(2x)}{1+x^4} \quad \text{donc en intégrant} \quad \frac{x \ln x}{1+16x^4} \leq \int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+t^4} dt \leq \frac{x \ln(2x)}{1+x^4}.$$

Puis $\frac{x \ln x}{1+16x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{16x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Et $\frac{x \ln(2x)}{1+x^4} = \frac{x \ln(2) + x \ln(x)}{1+x^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

Donc par théorème d'encadrement, $\boxed{\int_x^{2x} \frac{\ln t}{1+t^4} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}.$

Exercice 17. (**) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\int_e^x \ln(\ln t) dt \underset{+\infty}{\sim} x \ln(\ln x).$

Correction - Préliminaire : un encadrement ne donne rien donc on tente autre chose...

Une intégration par parties, (*en vous laissant deviner les fonctions posées et rédiger*), donne tout d'abord

$$\int_e^x \ln(\ln t) dt = x \ln(\ln x) - \int_e^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Reste à prouver que $\int_e^x \frac{dt}{\ln t} = o_{+\infty}(x \ln(\ln x)).$

Soit $x \geq e$, $t \in [e, x]$, $1 \ln t \leq \ln x$, donc $\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq 1$ et donc en intégrant bornes croissantes

$$\frac{x-e}{\ln x} \leq \int_e^x \frac{dt}{\ln t} \leq x-e \quad \text{donc} \quad \frac{x-e}{x \ln x \ln(\ln x)} \leq \frac{\int_e^x \frac{dt}{\ln t}}{x \ln(\ln x)} \leq \frac{x-e}{x \ln(\ln x)}.$$

Or $\frac{x-e}{x \ln x \ln(\ln x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x \ln(\ln x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{x-e}{x \ln(\ln x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(\ln x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc par théorème d'encadrement $\frac{\int_e^x \frac{dt}{\ln t}}{x \ln(\ln x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ce qui

prouve comme voulu $\int_e^x \frac{dt}{\ln t} = o_{+\infty}(x \ln(\ln x)).$ et donc $\boxed{\int_e^x \ln(\ln t) dt \underset{+\infty}{\sim} x \ln(\ln x)}.$

Exercice 18. (**) Soient x et a deux réels tels que : $x > a > e$. Montrer que : $\int_a^x \frac{dt}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}.$

Correction - Préliminaire :

- on essaye d'abord une majoration en majorant l'intégrande...Pas concluant.
- on essaye ensuite une intégration par parties, puis des des majorations. Pas concluant non plus...
- on essaye enfin une étude de fonction (cf. ci-dessus)

On pose pour $x > a > e$, $f(x) = \frac{2x}{\ln x} - \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$. f est dérivable sur $]a, +\infty[$ comme différence de $x \mapsto \frac{2x}{\ln x}$ qui l'est par quotient de fonctions usuelles et $x \mapsto \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ que l'on reconnaît comme une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$, et pour $x > a$,

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 2}{(\ln x)^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln x - 2}{\ln(x)^2}.$$

Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2$ d'où le tableau de variations de f .

x	a	e^2	$+\infty$
f'		+	0
f			

$f(e^2)$

Reste à prouver que $f(e^2) \geq 0$. Or $f(e^2) = e^2 - \int_a^{e^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Pour montrer cette inégalité on passe par une autre étude de fonction. On pose pour $x \geq a > e$, $g(x) = x - \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$, g est dérivable sur $[a, +\infty[$ avec

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln x} \geq 0.$$

Donc g est croissante sur $[a, +\infty[$, or $g(a) = a > 0$ donc $g > 0$ donc $g(e^2) > 0$ donc $f(e^2) > 0$ donc $f > 0$ et donc $\int_a^x \frac{dt}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}$.

Exercice 21. (*) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Étudier la parité de f .
- 3) Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
- 4) En déduire les variations de f .
- 5) À l'aide d'un encadrement, déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

Correction - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$.

- 1) Posons $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}} = (t^4 + 1)^{-\frac{1}{2}}$.

$t \mapsto t^4 + 1$ est continue sur \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R}_+^* et $t \mapsto t^{-\frac{1}{2}}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .
Donc par composition, g est continue sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $2x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Donc f est définie sur \mathbb{R} .

- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4 + 1}} \quad (\text{on a posé } t = -u) \\ &= - \int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4 + 1}} = -f(x) \quad \boxed{\text{Donc } f \text{ est impaire}} \end{aligned}$$

- 3) Posons G une primitive de g sur \mathbb{R} . Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = G(2x) - G(x).$$

Or $x \mapsto 2x$ est dérivable sur \mathbb{R} (à valeurs dans \mathbb{R}) et G est dérivable sur \mathbb{R} . Donc par composition, puis par différence, f est dérivable sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \frac{2}{\sqrt{8x^4 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

- 4) Puis pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{8x^4 + 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}} \Leftrightarrow \frac{4}{8x^4 + 1} \geq \frac{1}{x^4 + 1} \quad (\text{tout est positif et } t \mapsto t^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &\Leftrightarrow 4(x^4 + 1) \geq 8x^4 + 1 \Leftrightarrow 4x^4 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations.

- 5) Soit $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$ alors:

$$\begin{aligned} 1 + x^4 &\leq 1 + t^4 \leq 1 + 8x^4 \\ \text{donc } \sqrt{1 + x^4} &\leq \sqrt{1 + t^4} \leq \sqrt{1 + 8x^4} \quad (\text{la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ \text{d'où } \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} &\geq \frac{1}{\sqrt{1 + t^4}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + 8x^4}} \quad (\text{la fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale:

$$\frac{2x-x}{\sqrt{1+x^4}} \geq f(x) \geq \frac{2x-x}{\sqrt{1+8x^4}} \quad \text{donc} \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \geq f(x) \geq \frac{x}{\sqrt{1+8x^4}}.$$

Or $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{x}{\sqrt{1+8x^4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\sqrt{8x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc par théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Par imparité de f , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Exercice 22. (**) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que $\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Correction - Pour $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

Pour t au voisinage de 0, $\sin t = t + o(t^2)$ donc

$$\frac{\sin t}{t^2} = \frac{1}{t} + o(1) = \frac{1}{t} + h(t) \quad \text{où} \quad h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Alors h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$.

Notons que par ailleurs, $h(t) = \frac{\sin t}{t^2} - \frac{1}{t}$ donc h est continue sur \mathbb{R}^* . Et donc h est continue sur \mathbb{R} .

Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t} + h(t) dt = \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t} dt + \int_{ax}^{bx} h(t) dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \int_{ax}^{bx} h(t) dt.$$

Comme h est continue sur \mathbb{R} , on pose H une primitive de h sur \mathbb{R} ,

$$f(x) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + H(bx) - H(ax).$$

On fait tendre x vers 0, par continuité de H en 0,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + H(0) - H(0) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 23. (*) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} et g la fonction définie par $g(x) = \int_0^x f(t+x) dt$.

Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer l'expression de g' .

Correction - **NB** : la difficulté réside dans le fait que x est présent dans l'intégrande, il faut donc se ramener à des choses que l'on sait faire en faisant en sorte par exemple que x ne soit que dans les bornes pour se ramener à $\int_{u(x)}^{v(x)} h(t) dt$ que l'on sait traiter. Un changement de variable permet d'y parvenir.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u = t + x$ dans l'intégrale $\int_0^x f(t+x) dt$, alors

$$g(x) = \int_x^{2x} f(u) du.$$

On pose alors F une primitive sur \mathbb{R} de f (continue sur \mathbb{R}), de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(2x) - F(x).$$

Puis par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 , g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x)$.

Exercice 24. (*) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $F : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt.$$

- 1) Montrer que F peut être prolongée par continuité en 0. On note encore F ce prolongement.
- 2) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}^* et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
- 3) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

Correction - Notons φ une primitive de f sur \mathbb{R} (existe car f continue)

1) Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$F(x) = \frac{1}{2x}(\varphi(x) - \varphi(-x)).$$

Or φ est dérivable en 0, on peut écrire son $DL_1(0)$,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + o(x) = \varphi(0) + xf(0) + o(x)$$

Donc

$$F(x) = \frac{1}{2x}(\varphi(0) + x\varphi'(0) - (\varphi(0) - x\varphi'(0)) + o(x)) = f(0) + o(1).$$

Donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ donc F est prolongeable par continuité en posant $F(0) = f(0)$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) = \frac{1}{2x}(\varphi(x) - \varphi(-x))$. Comme φ est dérivable sur \mathbb{R} alors par opérations F est dérivable sur \mathbb{R}^* .
Puis après calculs,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'(x) = \frac{f(x) + f(-x) - 2F(x)}{2x}.$$

3) Pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} &= \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x (f(t) - f(0)) dt = \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x t f'(0) + th(t) dt \quad \text{où } h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\ &= \frac{1}{2x^2} \underbrace{\int_{-x}^x t f'(0) dt}_{=0} + \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x th(t) dt \\ &= \frac{1}{2x^2} \int_{-x}^x th(t) dt. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $h(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ alors posons $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\delta, \delta], \quad |h(t)| \leq \varepsilon.$$

On prend $x > 0,]0, \delta]$, alors

$$\left| \int_{-x}^x th(t) dt \right| \leq \int_{-x}^x t|h(t)| dt \leq \varepsilon \int_{-x}^x |t| dt = \varepsilon x^2.$$

Donc

$$\left| \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Donc

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Donc F est dérivable en 0 avec $F'(0) = 0$.

Exercice 26. (*) Calculer les limites des suites définies par les termes généraux suivants

$$1) \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2} \qquad 2) \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k} \text{ où } p \in \mathbb{N}^*.$$

Correction -

1) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2 + k^2}$. Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{\frac{(2n)^2}{4} + k^2} = T_{2n} \quad \text{où} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{\frac{n^2}{4} + k^2}.$$

On a donc

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{1}{4} + \left(\frac{k}{n}\right)^2} - 0 + \frac{n}{\frac{5n^2}{4}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{4}{5n} \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{x}{\frac{1}{4} + x^2}.$$

f est continue sur $[0, 1]$ donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 5.$$

Donc $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 5$ et donc $S_n = T_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 5$.

2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$ où $p \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement d'indice, $j = k - n$,

$$S_n = \sum_{j=0}^{(p-1)n} \frac{1}{j+n} = \sum_{j=0}^{(p-1)n} \frac{1}{j + \frac{n(p-1)}{p-1}} = T_{n(p-1)} \quad \text{où} \quad T_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j + \frac{n}{p-1}}.$$

On a donc

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{j}{n} + \frac{1}{p-1}} + \frac{1}{n + \frac{n}{p-1}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) + \frac{1}{n + \frac{n}{p-1}} \quad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{p-1}}.$$

f est continue sur $[0, 1]$ donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \left[\ln\left(x + \frac{1}{p-1}\right) \right]_0^1 = \ln\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) - \ln\left(\frac{1}{p-1}\right) = \ln p.$$

Donc $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln p$ et donc $\boxed{S_n = T_{(p-1)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln p}$.

Exercice 27. (\heartsuit) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer l'inégalité $\left| \int_0^1 f \right| \leq \int_0^1 |f|$ à l'aide sommes de Riemann.

Correction - Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f|(x_k).$$

Tout d'abord, d'après l'inégalité triangulaire, $|S_n| \leq T_n$. (*). Par ailleurs, d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx \quad T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f|(x) dx.$$

Donc, le passage à la limite de l'inégalité (*) donne $\boxed{\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx}$.

Exercice 28. (*) En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Correction - Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = n\sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1]$, donc d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3}.$$

Donc $\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n}}$.

Exercice 29. (***) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que f est positive.

Calculer la limite de $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{1+k}{n}\right)$.

Correction - Préliminaire: l'exercice aurait été facile si au lieu de S_n on avait eu $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$, car dans ce cas une simple

application du théorème sur les sommes de Riemann aurait prouvé que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Notons que S_n et T_n sont voisines, on va donc chercher à estimer la différence.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)}_{=T_n} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{1+k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)}_{S_n - T_n}.$$

$$|S_n - T_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \left| g\left(\frac{1+k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \quad (*)$$

Or g est continue sur le SEGMENT $[0, 1]$ donc est uniformément continue, d'après le théorème de Heine.

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon \quad (**).$$

Posons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} \leq \delta$, et prenons $n \geq N$, alors pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a $\left| \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \delta$ et donc d'après (**),

$$\left| g\left(\frac{1+k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

On reporte dans (*), on a donc pour $n \geq N$,

$$|S_n - T_n| \leq \varepsilon \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

Enfin $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|$ est bornée par un $K \in \mathbb{R}_+$, car admet une limite finie ($\int_0^1 |f|$ d'après la théorème sur les sommes de Riemann) alors

$$\forall n \geq N, \quad |S_n - T_n| \leq K\varepsilon.$$

On retrouve donc la définition de $S_n - T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Finalement en revenant à $S_n = T_n + (S_n - T_n)$ et donc $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

Exercice 31. (\heartsuit) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$. Montrer que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \cos x$.

Correction - Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n+1$ (cos est de classe \mathcal{C}^{2n+1} sur \mathbb{R}) à la fonction cos en 0:

$$|\cos(x) - S_n(x)| = \left| \cos(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x-0|^{2n+1}}{(2n+1)!} \max_{[0,x] \text{ ou } [x,0]} |\cos^{(n+1)}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Or $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \cos x$.

Exercice 32. (*) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Correction - Application simple de la formule de Taylor Young, on trouve : $f''(a)$. *Calculs laissés au lecteur.*

Exercice 33. (***) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que f et f'' soient bornées. On pose

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \quad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|.$$

- 1) Déterminer l'existence de M_0 et M_2 .
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $h > 0$,

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

- 3) En déduire l'existence de M_1 et prouver que

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Correction -

- 1) Découle de f et f'' bornées sur \mathbb{R} .
- 2) On utilise la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t) dt \quad \text{c'est-à-dire} \quad hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \int_x^{x+h} f''(t)(x+h-t) dt.$$

Donc par inégalité triangulaire et majoration en valeur absolue ($x \leq x+h$) :

$$|hf'(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| + \int_x^{x+h} |f''(t)||x+h-t| dt \leq 2M_0 + M_2 \int_x^{x+h} (x+h-t) dt.$$

On calcule l'intégrale

$$\int_x^{x+h} (x+h-t) dt = \left[-\frac{1}{2}(x+h-t)^2\right]_x^{x+h} = \frac{h^2}{2}.$$

D'où

$$h|f'(x)| \leq 2M_0 + \frac{h^2}{2}M_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

3) On fixe $h > 0$. L'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} \text{ ce pour tout } h > 0.$$

On pose la fonction $g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$ une simple étude de cette fonction montre qu'elle admet un minimum en $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$, ce minimum vaut $2\sqrt{M_0M_2}$.

On prend donc $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ dans l'inégalité ci-dessus, pour obtenir

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Exercice 34. (***) Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$.

On commencera par linéariser $\sin^2 x$ puis on transformera l'expression à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 2.

Correction - Préliminaire : on pense évidemment à une somme de Riemann. La difficulté réside dans le fait que l'on ne peut "rentrer" le $\frac{1}{n}$ dans \sin pour donner un $\sin \frac{k}{n}$, il n'y a pas de formule sur le sinus qui permet de faire ça. L'idée est donc de remplacer $\sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$ par une expression qui permettrait de faire apparaître une somme de Riemann et dans le même temps pouvoir contrôler l'erreur commise. La formule de Taylor permet de faire tout ça !

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ or d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\left| \cos(u) - 1 + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{6} \sup_{[0, u]} |\cos^{(3)}| \leq \frac{u^3}{6}.$$

Avec $u = 2x$,

$$|\cos(2x) - 1 + 2x^2| \leq \frac{4x^3}{3} \quad \text{donc} \quad \left| \frac{1 - \cos(2x)}{2} - x^2 \right| \leq \frac{2x^3}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad |\sin^2 x - x^2| \leq \frac{2x^3}{3}.$$

Conclusion,

$$\sin^2 x = x^2 + \underbrace{(\sin^2 x - x^2)}_{h(x)} \quad \text{où} \quad 0 \leq |h(x)| \leq \frac{2x^3}{3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 + h\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}_{=S_n} + \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} h\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{=T_n}.$$

Pour S_n , on reconnaît une somme de Riemann,

$$S_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \frac{1}{\frac{j}{n} + 1} + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

Pour T_n , on majore en valeur absolue, en exploitant $|h(x)| \leq \frac{2x^3}{3}$

$$\begin{aligned} |T_n| &\leq \sum_{k=n}^{2n} \left| h\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right| \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{2}{3} \frac{1}{k\sqrt{k}} \\ &\leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{2}{3} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (\text{en majorant chaque } \frac{1}{k\sqrt{k}} \text{ par } \frac{1}{n\sqrt{n}}) \\ &\leq \frac{2}{3\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2}$.