Exercice 4. ($**$) Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère la fonction définie sur E par:

$$\forall f \in E,\ u(f) = F \quad \text{où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = xf(x).$$

1) Montrer que u est un endomorphisme de E.

2) Montrer que u est injective.

3) Montrer que $\operatorname{Im} u = \{F \in E \ / \ F(0) = 0 \text{ et } F \text{ dérivable en } 0\}$.

Correction -

1) Pour tout $f \in E$, alors $x \mapsto xf(x)$ est continue donc est éléments de E, donc $u : E \to E$.
Soit $(f, g) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$u(\lambda f + g)(x) = x(\lambda f + g)(x) = x\lambda f(x) + xg(x) = \lambda u(f)(x) + u(g)(x).$$
L'égalité étant vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, il découle $u(\lambda f + g) = \lambda u(f) + u(g)$. Donc $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$.

2) Soit $f \in E$,
$$\begin{aligned} u(f) = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad xf(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad x = 0 \text{ ou } f(x) = 0 \text{ (si } x \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \text{ car } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow f = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}. \end{aligned}$$
Donc $\boxed{\operatorname{Ker} u = \{0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\}}$, donc $\boxed{f \text{ est injective}}$

3) On raisonne par double-inclusion.
Soit $F \in \operatorname{Im} u$, posons alors $f \in E$ (continue donc) tel que $F = u(f)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = xf(x)$. Donc $F(0) = 0$, puis pour $x \neq 0$, $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0)$ donc F est dérivable en 0.
Soit F dérivable en 0 tel que $F(0) = 0$. Posons pour $x \neq 0$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ F'(0) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Alors f est continue en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = xf(x)$ donc $F = u(f) \in \operatorname{Im} u$.
Donc $\operatorname{Im} u = \{F \in E \ / \ F(0) = 0 \text{ et } F \text{ dérivable en } 0\}$.

Exercice 5. ($\heartsuit$) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\begin{array}{cccc} \Psi : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & f'' - 4f' + 4f \end{array}$

1) Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer le noyau de Ψ en donner une base.

Correction - Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\begin{array}{cccc} \Psi : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & f'' - 4f' + 4f \end{array}$

1) *Laissé au lecteur.*

2) On résout l'équation différentielle $f'' - 4f' + 4f = 0$, on prouve alors que $\operatorname{Ker} \Psi = \operatorname{Vect}(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x\,e^{2x})$. Les fonctions $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto x\,e^{2x}$ ne sont pas proportionnelles, donc la famille $(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x\,e^{2x})$ est libre. Donc $\boxed{(x \mapsto e^{2x}, x \mapsto x\,e^{2x}) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} \Psi}$.

Exercice 6. ($*$) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\begin{array}{cccc} \Phi_k : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f^{(k)}(0) \end{array}$.

1) Montrer que Φ_k est linéaire.

2) Montrer que $(\Phi_0, \ldots, \Phi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Correction - Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\begin{array}{cccc} \Phi_k : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f^{(k)}(0) \end{array}$.

1) *Laissé au lecteur.*

2) Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \Phi_k = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$, c'est-à-dire

$$\forall f \in E, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f^{(k)}(0) = 0.$$

On choisit en particulier $f : x \mapsto x^j$, successivement pour $j = 0, \dots, j = n$, on obtient donc de proche en proche

$$\lambda_0 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Donc $\boxed{\text{la famille } (\Phi_0, \dots, \Phi_n) \text{ est libre}}$.

Exercice 10. $(*)$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

1) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$

2) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

Correction -

1) • $\Rightarrow$): supposons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrons $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$. On procède par double inclusion.

On a clairement $\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$, car $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc contiennent 0_E.

Inversement, soit $u \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors $u \in \operatorname{Ker} f$ donc $f(u) = 0_E$ et $u \in \operatorname{Im} f$ donc posons $v \in E$ tel que $u = f(v)$.
Comme $u \in \operatorname{Ker} f$, $0_E = f(u) = f^2(v)$ donc $v \in \operatorname{Ker} f^2$. Or $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ donc $v \in \operatorname{Ker} f$ donc $u = f(v) = 0_E$. D'où la deuxième inclusion $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0_E\}$.
D'où l'égalité voulue $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$ et la première implication.

• $\Leftarrow$): Supposons $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$. Montrons $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. On procède par double inclusion.

Soit $v \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(u) = 0_E$. Par transport du neutre $f^2(u) = f(f(u)) = 0_E$. Donc $u \in \operatorname{Ker} f^2$. D'où la première inclusion $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
Inversement, soit $u \in \operatorname{Ker} f^2$, $f^2(u) = 0_E$. Donc $f(u)$ est à la fois un élément de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$. Or $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$, donc $f(u) = 0_E$ donc $u \in \operatorname{Ker} f$. D'où la deuxième inclusion. Et donc l'égalité voulue $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

On a donc bien $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}}$.

2) • $\Rightarrow$): supposons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$. Montrons $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.
On a clairement $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \subset E$, car $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Inversement, soit $u \in E$. Alors $f(u) \in \operatorname{Im} f$. Or par hypothèse $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$, donc on peut poser $a \in E$ tel que $f(u) = f^2(a)$.
Écrivons alors

$$u = f(a) + (u - f(a)).$$

Alors $f(a) \in \operatorname{Im} u$ et $u - f(a) \in \operatorname{Ker} u$ car $f(u - f(a)) = f(u) - f^2(a) = 0_E$. Finalement $u \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$. D'où la deuxième inclusion $E \subset \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.
D'où l'égalité voulue $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

• $\Leftarrow$): réciproquement, supposons $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Montrons $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
Soit $v \in \operatorname{Im} f^2$, alors posons $u \in E$ tel que $v = f^2(u)$. En particulier, $v = f(f(u))$ qui appartient alors à $\operatorname{Im} f$. D'où la première inclusion $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
Inversement, soit $v \in \operatorname{Im} f$, alors posons $u \in E$ tel que $v = f(u)$.
Comme $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ alors posons $a \in \operatorname{Ker} f$ et $b \in \operatorname{Im} f$ tel que $u = a + b$. Comme $b \in \operatorname{Im} f$, posons $c \in E$ tel que $b = f(c)$, ainsi $u = a + f(c)$.
Donc

$$v = f(u) = \underbrace{f(a)}_{=0_E} + f^2(c) = f^2(c) \in \operatorname{Im} f^2.$$

D'où l'autre inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$. D'où l'égalité voulue $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

On a donc bien $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f}$.

Exercice 11 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 - 3f + 2\operatorname{Id}_E = 0$.

1) Montrer que f est bijective en exhibant sa réciproque.

2) Montrer que $(f - \operatorname{Id}_E) \circ (f - 2\operatorname{Id}_E) = 0$. En déduire que $\operatorname{Im}(f - 2\operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$.

3) Montrer que $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E)$.

4) Montrer que $E = \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E) + \operatorname{Im}(f - 2\operatorname{Id}_E)$.

5) Déduire de ce qui précède que $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Puis exercice 20.

6) Montrer qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et des projecteurs p et q tels que $\begin{cases} p=\lambda(f-\mathrm{Id}_E)\\ q=\mu(f-2\,\mathrm{Id}_E)\\ f=2p+q\end{cases}$.

7) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, calculer f^k en fonction de p,q.

Correction - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que $f^2-3f+2\,\mathrm{Id}_E=0$.

1) De $f^2-3f+2\,\mathrm{Id}_E=0$, on déduit $\frac{1}{2}(3f-f^2)=\mathrm{Id}_E$ i.e. $\frac{1}{2}(3\,\mathrm{Id}_E-f)\circ f=f\circ(\frac{1}{2}(3\,\mathrm{Id}_E-f))$.
Donc, d'après un théorème de caractérisation des bijections, $\boxed{f \text{ est bijective avec } f^{-1}=\frac{1}{2}(3\,\mathrm{Id}_E-f)}$

2) On a:

$$\begin{aligned}(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)&=f\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)-\mathrm{Id}_E\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)\quad\text{(distributivité de }\circ\text{ par rapport à }+)\\&=f^2-2f-f+2\,\mathrm{Id}_E=f^2-3f+2\,\mathrm{Id}_E\\ \boxed{(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)=O_{\mathcal{L}(E)}}&\quad\text{(par hypothèse)}\end{aligned}$$

Soit $v\in\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$, il existe alors $u\in E$ tel que $v=(f-2\,\mathrm{Id}_E)(u)$.
Donc $(f-\mathrm{Id}_E)(v)=(f-\mathrm{Id}_E)((f-2\,\mathrm{Id}_E)(u))=((f-\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E))(u)=O_E$ car $(f-\mathrm{Id}_E)\circ(f-2\,\mathrm{Id}_E)=O_{\mathcal{L}(E)}$. Donc $v\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$.
Finalement, $\boxed{\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)}$.

3) De manière similaire on prouve $(f-2\,\mathrm{Id}_E)\circ(f-\mathrm{Id}_E)=O_{\mathcal{L}(E)}$, on déduit $\boxed{\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)}$.

4)
- Comme $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)\subset E$.
- Inversement, soit $u\in E$, alors
$$u=(f(u)-u)-(f(u)-2u)=(f-\mathrm{Id}_E)(u)+(f-2\,\mathrm{Id}_E)(-u)\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$$
D'où la deuxième inclusion.
- Finalement, $\boxed{E=\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)}$.

5)
- On montre tout d'abord $E=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$.
Tout d'abord $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)\subset E$, car $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $u\in E$, d'après 4), il existe $a\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $b\in\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ tel que $u=a+b$. Or d'après 2) et 3), $\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id}_E)\subset\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$, donc $a\in\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ et $b\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$. Finalement $u\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)+\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$. D'où la deuxième inclusion.
- On montre ensuite $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)=\{0_E\}$.
Tout d'abord $\{0_E\}\subset\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ car $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Inversement, soit $u\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\cap\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$. Alors
$$(f-\mathrm{Id}_E)(u)=0_E\text{ i.e. }f(u)=u\qquad(f-2\,\mathrm{Id}_E)(u)=0_E\text{ i.e. }f(u)=2u.$$
D'où $f(u)=u=2u$ et donc $u=0_E$. D'où la deuxième inclusion.
- Finalement, $\boxed{E=\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)}$.

6) -a- Posons p la projection sur $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$.
Soit $u\in E$, posons alors $u_1\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)$ et $u_2\in\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id}_E)$ tels que $u=u_1+u_2$.
Notons que $p(u)=u_1$ et $q(u)=u_2$ et $f(u_1)=u_1$ et $f(u_2)=2u_2$. Alors:
$$(p+q)(u)=p(u)+q(u)=u_1+u_2=u.\qquad\text{Donc }\boxed{p+q=\mathrm{Id}_E}.$$
Puis:
$$f(u)=f(u_1+u_2)=f(u_1)+f(u_2)=u_1+2u_2=p(u)+2q(u)=(p+2q)(u).\qquad\text{Donc }\boxed{f=p+2q}$$
Puis, comme $\begin{cases}p+q=\mathrm{Id}_E\\ p+2q=f\end{cases}$. $-L_1+L_2$ donne $\boxed{q=f-\mathrm{Id}_E}$ et $2L_1-L_2$ donne $\boxed{p=2\,\mathrm{Id}_E-f}$.

-b- Soit $n\in\mathbb{N}$, $f^n=(p+2q)^n$.
Notons que $p\circ q=p\circ(\mathrm{Id}_E-p)=p-p\circ p=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $q\circ p=(\mathrm{Id}_E-p)\circ p=p-p\circ p=0_{\mathcal{L}(E)}$ car p est un projecteur donc $p\circ p=p$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton; pour $n\geqslant 2$,
$$\begin{aligned}f^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\circ(2q)^{n-k}\\&=\binom{n}{0}p^0\circ(2q)^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}p^k(2q)^{n-k}+\binom{n}{n}p^n(2q)^0\\&=2^nq+p.\end{aligned}$$
Car pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, $p^j=p$ et $q^j=q$ (que l'on peut montrer par récurrence).
Notons que pour $n=0$, $2^0q+p=q+p=\mathrm{Id}_3=f^0$ et pour $n=1$, $2^1q+p=p+2q=f$.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ f^n=p+2^nq}$.

Exercice 12 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 + 2\,\mathrm{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$ et exprimer sa réciproque à l'aide de f et de ses itérées.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$ alors $f - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est inversible.

Correction -

1) $f \circ \left[-\frac{1}{2}(f^2+f)\right] = \left[-\frac{1}{2}(f^2+f)\right] \circ f = \mathrm{Id}_E$ donc par caractérisation des bijections $\boxed{f \text{ est bijective de réciproque } -\frac{1}{2}(f^2+f)}$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$.

- f injective : montrons $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.
  L'inclusion $\supset$ découle du fait que $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ est un sev de E.
  Pour l'inclusion $\subset$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ alors $f(x) = \lambda x$. Donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$. Et $f^3(x) = \lambda^3 x$.
  Alors par hypothèse $0_E = (f^3 + f^2 + 2\,\mathrm{Id}_E)(x) = \lambda^3 x + \lambda^2 x + x = (\lambda^3 + \lambda^2 + 1)x$. Or $\lambda^3 + \lambda^2 + 1 \neq 0$ donc $x = 0_E$.
- f surjective : soit $y \in E$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)(x)$.
  Analyse: soit $x \in E$ tel que $y = (f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)(x) = f(x) - \lambda x$. Alors
  $$f(y) = f^2(x) - \lambda f(x) \qquad f^2(y) = f^3(x) - \lambda f^2(x) = (-f^2(x) - 2x) - \lambda f^2(x) = -(1+\lambda)f^2(x) - 2x.$$
  Donc,
  $$f^2(y) = -(1+\lambda)(f(y) + \lambda f(x)) - 2x = -(1+\lambda)(f(y) + \lambda(y + \lambda x)) - 2x.$$
  Donc
  $$f^2(y) = (1+\lambda)f(y) + (\lambda^2+\lambda)y + (\lambda^3 + \lambda^2 - 2)x.$$
  Et comme $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 \neq 0$,
  $$x = \frac{1}{\lambda^3 + \lambda^2 - 2}\left(f^2(y) - (1+\lambda)f(y) - (\lambda^2+\lambda)y\right).$$
  Synthèse: on vérifie que ce x convient [...]

Donc f est bijective, donc f est inversible.

Exercice 13. (**) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$. Montrer que
$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - j^2\,\mathrm{Id}_E).$$

Correction - On montre que tout $x \in E$ se décompose de manière unique comme somme d'éléments de ces trois noyaux.
Soit $x \in E$.

1) **Analyse**. Posons $x = a + b + c$ tel que $a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, $b \in \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id}_E)$, $c \in \mathrm{Ker}(f - j^2\,\mathrm{Id}_E)$.
   Notons que si $u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ alors $(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)(u) = 0_E$ donc $f(u) = \lambda u$, et donc
   $$f(a) = a \qquad f(b) = jb \qquad f(c) = j^2 c.$$
   Alors,
   $$f(x) = a + jb + j^2 c \qquad f^2(x) = f(a) + jf(b) + j^2 f(c) = a + j^2 b + jc.$$
   Alors
   $$\begin{cases} x + f(x) + f^2(x) = 3a + (1 + j + j^2)b + (1 + j^2 + j)c = 3a \\ x + jf(x) + j^2 f^2(x) = (1 + j + j^2)a + (1 + j^2 + j)b + (1 + j^3 + j^3)c = 3c \\ x + j^2 f(x) + jf^2(x) = (1 + j^2 + j)a + (1 + j^3 + j^3)b + (1 + j + j^2)c = 3b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x)) \\ c = \frac{1}{3}(x + jf(x) + j^2 f^2(x)) \\ b = \frac{1}{3}(x + j^2 f(x) + jf^2(x)) \end{cases}.$$
   Ce qui prouve l'unicité.
2) **Synthèse**. La décomposition ci-dessus convient [...]
3) $\boxed{E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - j^2\,\mathrm{Id}_E).}$

Exercice 14. (**) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires.

1) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

2) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ avec x et y non nuls, on a $\lambda_x = \lambda_y$.

3) Montrer alors que f est une homothétie vectorielle.

Correction -

1) Soit $x \in E$. Comme x et $f(x)$ sont colinéaires alors $(x, f(x))$ est liée, posons alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tel que $\alpha x + \beta f(x) = 0_E$.
   Si $\beta \neq 0$ alors $f(x) = -\frac{\alpha}{\beta}x$. Si $\beta = 0$ alors $\alpha x = 0_E$ donc $x = 0_E$ car $\alpha \neq 0$ donc $f(0_E) = 0_E = 1 \times 0_E$.
   Donc, $\boxed{\text{il existe } \lambda_x \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(x) = \lambda_x x}$.

2) Soit $(x,y) \in E^2$, x,y non nuls.
Si (x,y) est liée alors $y = \alpha x$ où $\alpha \in K$. Alors $f(x) = \lambda_x x$. Puis d'une part $f(y) = \lambda_y y$ et d'autre part $f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x = \lambda_x(\alpha x) = \lambda_x y$. Or $y \neq 0$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.
Supposons (x,y) libre. Alors, d'une part, $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$ et d'autre part $f(x+y) = f(x)+f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Donc
$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y \text{ c'est-à-dire } (\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E.$$
Comme la famille (x,y) est libre, alors $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

3) Fixons $a \in E$, $a \neq 0_E$ alors pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$ d'après 2), $\lambda_x = \lambda_a$ donc : $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda_a x$. On pose $\alpha = \lambda_a$ alors pour tout $x \in E$, $f(x) = \alpha x$ (fonctionne aussi pour $x = 0_E$, dans ce cas on a $0_E = 0_E$). Donc f est une homothétie vectorielle.

Exercice 17. (♡) Montrer que l'application $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-3x+2y, -4x+3y) \end{array}$ est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

Correction - Tout d'abord $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Puis, soient $((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{aligned} s(\lambda(x,y) + (x',y')) &= s(\lambda x + x', \lambda y + y') = (-3(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), -4(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(-3x+2y, -4x+3y) + (-3x'+2y', -4x'+3y') = \lambda s(x,y) + s(x',y'). \end{aligned}$$
Donc $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Enfin, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$s^2(x,y) = s(-3x+2y, -4x+3y) = (-3(-3x+2y) + 2(-4x+3y), -4(-3x+2y) + 3(-4x+3y)) = (x,y) \qquad \text{donc} \qquad s^2 = \mathrm{Id}_E.$$
Finalement s est une symétrie de $\mathbb{R}^2$ de base $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et de direction $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow s(x,y) - (x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-4x+2y, -4x+2y) = (0,0) \Leftrightarrow y = 2x.$$
$$(x,y) \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow s(x,y) + (x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-2x+2y, -4x+4y) = (0,0) \Leftrightarrow y = x.$$
Finalement $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{(x,2x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,2))$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{(x,x) \,/\, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1))$.
Donc $\boxed{s \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Vect}((1,2)) \text{ et parallèlement à } \mathrm{Vect}((1,1))}$.

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1) Montrer que $p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$.
2) Montrer que $p \circ q = q \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$.
3) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_E$.

Correction -

1) Supposons $p \circ q = p$. Montrons que $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\, q$. Alors par hypothèse $p(x) = (p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(0_E) = 0_E$ car $x \in \mathrm{Ker}\, q$ implique $q(x) = 0_E$. D'où $x \in \mathrm{Ker}\, p$. Donc $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$.
Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p$. Montrons que $p \circ q = p$. Soit $x \in E$,
$$q^2(x) = q(x) \quad \text{donc} \quad q(q(x) - x) = 0_E \quad \text{donc} \quad q(x) - x \in \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p \quad \text{donc} \quad p(q(x) - x) = 0_E \quad \text{i.e.} \quad (p \circ q)(x) = p(x).$$
On a donc $p \circ q = p$. Finalement $\boxed{p \circ q = p \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, p}$.

2) Supposons $p \circ q = q$. Montrons que $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$.
Soit $y \in \mathrm{Im}\, q$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$. Or $q = p \circ q$ donc $y = (p \circ q)(x) = p(q(x))$, donc $y \in \mathrm{Im}\, p$. D'où $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$.
Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$. Montrons que $p \circ q = q$. Soit $x \in E$, alors $q(x) \in \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$ donc il existe $a \in E$ tel que $q(x) = p(a)$. Alors $(p \circ q)(x) = p^2(a) = p(a)$ car p est un projecteur donc $(p \circ q)(x) = q(x)$. D'où $p \circ q = q$.
Finalement, $\boxed{p \circ q = q \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p}$.

3) Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$ et donc $p + q$ est un projecteur.
Réciproquement supposons que $p + q$ est un projecteur i.e. $p + q = (p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p \circ q + q \circ p + q$ ce qui équivaut à $p \circ q + q \circ p = 0$ $(*)$. En composant par p à gauche et à droite il vient $\begin{cases} p \circ q + p \circ q \circ p = 0 \\ p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \end{cases}$. Donc en soustrayant, il vient $p \circ q - q \circ p = 0$ $(**)$. Enfin en additionnant et en soustrayant $(*)$ et $(**)$ il vient $p \circ q = q \circ p = 0$.
Donc: $\boxed{p + q \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0_E}$.

Exercice 21. $(**)$ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et $q = \mathrm{Id}_E - p$ le projecteur associé à p. On pose
$$G = \{g \in \mathcal{L}(E) \,/\, \exists u \in \mathcal{L}(E),\ g = u \circ p\} \qquad H = \{h \in \mathcal{L}(E) \,/\, \exists v \in \mathcal{L}(E),\ h = v \circ q\}.$$
Montrer que $G \oplus H = \mathcal{L}(E)$.

Correction - On montre que tout $f \in \mathcal{L}(E)$ s'écrit de manière unique sous forme $f = g + h$ où $g \in G$ et $h \in H$, en raisonnant par analyse-synthèse.
[...] On trouve $f = f \circ p + f \circ q$.

Exercice 23. $(*)$ On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(0) \end{array}$. Montrer que φ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

Correction - φ est une forme linéaire [*laissée au lecteur*].
De plus φ est non nulle ($\phi(\exp) = \exp(0) = 1 \neq 0$) donc $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan. D'après le théorème de caractérisation des hyperplans, $\operatorname{Vect}(\exp)$ est un supplémentaire de H (car $\exp \in E \setminus H$.