Base et dimension

Exercice 1. ($\heartsuit$) Montrer que les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{R}^n$.

1) Dans $\mathbb{R}^2$, (u_1, u_2) où $u_1 = (2, 5)$ et $u_2 = (3, 7)$
2) Dans $\mathbb{R}^3$, (u_1, u_2, u_3) où $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (2, 0, -3)$ et $u_3 = (-4, 1, 1)$.
3) Dans $\mathbb{R}^n$, $u_1 = (1, 0 \dots, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$ et $u_n = (1, 1, \dots, 1)$.

Exercice 2. ($\heartsuit$) On pose $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 3)$ et $w = (a, a^2, a^3)$ où $a \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer en fonction de a le rang de la famille (u, v, w).
2) Pour quelles valeurs de a cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3. ($\heartsuit$) Calculer le rang de ces familles de vecteurs. Sont-elles des bases de $\mathbb{R}_2[X]$?

1) $P_1 = X^2 + 3X - 4$, $P_2 = 2X^2 - 5X + 7$
2) $P_1 = 2X^2 + 5X - 1$, $P_2 = -5X + 7$, $P_3 = 7$
3) $P_1 = 3X^2 - 3X$, $P_2 = X + 4$, $P_3 = -X^2 - 5X + 1$, $P_4 = 2X^2 - X + 1$

Exercice 4. ($*$) Soient $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ $n+1$ deux à deux distincts et pour $i \in [\![0, n]\!]$, les polynômes

$$P_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(X - x_j)}{x_i - x_j}.$$

1) Montrer que que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Exprimer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 5. ($\heartsuit$) Soit F l'ensemble des applications de la forme $x \mapsto P(x)\cos x + Q(x)\sin x$ où P et Q sont des fonctions polynomiales de degré au plus 2. Montrer que F est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

Exercice 6. ($\heartsuit$) Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants

1) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y + 3z = 0\}$
2) $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 0, y + z = 0, z + t = 0, t + x = 0\}$
3) $E_3 = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n\}$
4) $E_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \ / \ f$ deux fois dérivable $f'' - 3f' + 2f = 0\}$
5) $E_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}'(1) = 0\}$
6) $E_6 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ DM = MD\}$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7 On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(K)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer leur dimension.
2) Montrer alors qu'ils sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8. ($*$) Soit E un espace-vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Déterminer, si les familles suivantes forment une base de E:

1) $\mathcal{F}_1 = (e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + e_{n-1}, e_1 + e_n)$
2) $\mathcal{F}_2 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$
3) $\mathcal{F}_3 = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1)$.

Somme de sous-espaces vectoriels

Exercice 9. ($\heartsuit$) On considère les vecteurs $a = (1, 2, 1, 0)$, $b = (2, 1, 3, -1)$, $c = (-1, 4, -3, 2)$ et le sous espace $F = \mathrm{Vect}(a, b, c)$.

1) Déterminer la dimension et une base de F.
2) On pose $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ /2x + y + z + t = 0 \ \text{ et } \ x + z - t = 0\}$. Déterminer une base de G ainsi que sa dimension.
3) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 10. ($\heartsuit$) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ /2x - y + z + t = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11. ($\heartsuit$) Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ /2x - y + z + t = 0 \text{ et } x - 3z - t = 0\}$

1) Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base et la dimension.
2) Déterminer un supplémentaire de de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12. ($\heartsuit$) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}'(1) = 0\}$.
Montrer que $G = \mathrm{Vect}(X + 1, X^2 + 1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 13. ($*$) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on pose les trois sev suivants

$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(0) = P(1) = P(2) = 0\} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(1) = P(2) = P(3) = 0\} \quad H = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/P(X) = P(-X)\}$

1) Déterminer les dimensions de F, G, H.
2) Montrer que $F \oplus G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ / \ P(1) = P(2) = 0\}$.
3) Montrer que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 14. ($\heartsuit$) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension 5 tels que $\dim F = \dim G = 3$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 15. ($\heartsuit$)- Formule de Grassmann : démonstration constructive Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et F et G deux sev de E de dimension finie non nulle.
On veut démontrer :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

1) On pose $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $F \cap G$. Justifier qu'il existe des familles de vecteurs $(f_1, \ldots, f_q)$ de F et $(g_1, \ldots, g_r)$ de G tels que $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q)$ est une base de F et $(e_1, \ldots, e_p, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de G.
2) Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_q, g_1, \ldots, g_r)$ est une base de $F + G$.
3) Conclure.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 16. ($\heartsuit$) Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer une base de leur image et de leur noyau.

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-z, -x-y+3z, x+3y+z) \end{array}$

3) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (\widetilde{P}(0), \widetilde{P}'(0), \widetilde{P}(1)) \end{array}$

2) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + \mathrm{i}\,\overline{z} \end{array}$, où $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}$-ev.

4) $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17. ($\heartsuit$) Soit l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, y+z, y+z) \end{array}$.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.
2) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

Exercice 18. ($*$)Polynômes de Lagrange

1) Soient $x_0, \dots, x_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts et l'application $\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array}$.
   - -a- Montrer que Φ est un isomorphisme.
   - -b- En déduire que si $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = y_i$. Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.
2) Soient a et b deux réels distincts et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.
Adapter la méthode précédente pour montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P(a) = \alpha \qquad P(b) = \beta \qquad P'(a) = \gamma \qquad P'(b) = \delta.$$

Exercice 19. ($\heartsuit$)-($*$) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit l'application f par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P(X+1) - P(X).$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer le noyau de f.
3) On pose f_n la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer l'image de f_n.
4) Montrer que f est surjectif.

Exercice 20. ($**$) On pose $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P' + P'' \end{array}$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercices théoriques

Exercice 21. ($\heartsuit$) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 22. ($*$) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E tel que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^2)$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$. En déduire que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

2) Déduire de ce qui précède que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 23. ($\heartsuit$) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1) Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leqslant n$.

2) Peut-on avoir égalité?

Exercice 24. ($\heartsuit$) Soient E un ev de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Quelles sont les valeurs possibles de $\operatorname{rg}(f)$?

Exercice 25. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et u un endomorphisme nilpotent, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit q le plus petit entier vérifiant la relation précédente (on l'appelle indice de nilpotence de u).

1) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0_E$ et que la famille $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre.

2) Comparer q et n.

3) Déduire finalement que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 26. ($**$) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E.

1) Montrer que: $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que dans ce cas $2\operatorname{rg}(f) \leqslant n$.

2) Montrer que: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow (f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $n = 2\operatorname{rg}(f))$.

Exercice 27. ($*$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E. On souhaite prouver que

$$\dim \operatorname{Ker} f^2 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f.$$

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sev de $\operatorname{Ker} f^2$ et qu'il existe F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans $\operatorname{Ker} f^2$.

2) Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Montrer que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker} f$.

3) En déduire la l'inégalité voulue.

Exercice 28. ($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g.$$

Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans E, ainsi que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v$.

Exercice 29. ($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F et G deux sev de E.
Montrer que $\dim E = \dim F + \dim G$ si et seulement s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Ker} f = F$ et $\operatorname{Im} f = G$.

Exercice 30. ($*$) Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g)$.

Exercice 31. ($*$) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f,g) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$.

1) Montrer que $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

2) On suppose que $E = F$, $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim E$.