Chapitre
Matrices et applications linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n, p, q \in \mathbb{N}^*$.

I Représentation matricielle des applications linéaires

I.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition (Matrice d'une famille de vecteurs)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, les x_j se décomposent dans la base $\mathcal{B}$:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, \qquad a_{ij} \text{ } i\text{-ième coordonné de } x_j.$$

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$ notée

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)$$

est appelée **matrice de la famille $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ dans la base $\mathcal{B}$.**

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p) = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & & x_j & & x_p \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array}.$$

(On écrit donc en colonnes les coordonnées de x_j.)

Exemples

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$.
Déterminer la matrice de (u_1, u_2) dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice de (u_2, u_1) dans la base $\mathcal{B}$.

2) Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (e_2, e_1)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = (1, 0)$ et $\varepsilon_2 = (1, 1)$.
On pose $u_1 = (1, 2)$ et $u_2 = (-1, 3)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_1, u_2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_1, u_2)$.

3) Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On pose $P_1 = X^3 + X$, $P_2 = -X^2 + 2X + 1$, $P_3 = X^3 - 2X + 2$.
Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3)$.

I.2 Matrice d'une application linéaire

Définition (Matrice d'une application linéaire)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\dim E = p$, $\dim F = n$ de bases respectives $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ la matrice de la famille famille de vecteurs $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ i.e.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \ldots, f(e_p)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & f(e_p) & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{np} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{array}.$$

  Les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sont données par $f(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$.

- Si $E = F$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Remarques

1) Pour une application linéaire donnée, si on change les bases de E et F on change la matrice de l'application linéaire (cf. exemples ci-dessous).
2) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ a pour format $(\dim F, \dim E)$.
3) Si f est un endomorphisme de E, on prend souvent la même base au départ et à l'arrivée, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. La matrice obtenue est forcément carrée.

Exemples

1) Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, 3x+4y) \end{array}$. Déterminer la matrice de f relativement aux bases :

   -a- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

   -b- $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ et $\mathcal{C}' = ((1,0),(1,1))$

   -c- $\mathcal{B}'' = ((0,0,1),(0,1,0),(1,0,0))$ et $\mathcal{C}'' = ((0,1),(1,0))$

2) Soit $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, 2x-z, y+3z) \end{array}$. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit $D: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. Déterminer la matrice de D relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$.

4) Soit $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P'(1), P(0), P(-1)) \end{array}$. Déterminer la matrice de φ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

5) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Considérons l'application linéaire $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_{31} & \to & \mathcal{M}_{21} \\ & X & \mapsto & AX \end{array}$ canoniquement associée à A.
Déterminons la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$.
NB: en pratique pour cette application linéaire on identifie $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^2$. **Plus généralement**, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ & X & \mapsto & AX \end{array}$ **l'application linéaire canoniquement associée à** A (on a identifié $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$). Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi) = A$ où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}\psi$ et $\mathbb{K}^n$.

6) Soit la forme linéaire $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & 2x-3y+z \end{array}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (1) la base canonique de $\mathbb{R}$. Déterminer la matrice de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

7) Déterminer la matrice de l'endomorphisme Id_E relativement à une base $\mathcal{B}$ de E.

Exercice. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et F, G deux sev supplémentaires dans E.
Soit p la projection sur F parallèlement à G. On pose $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_F$ une base de E où $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de F et G.
Déterminer la forme de la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. Cette **base est dite adaptée à** p**.**
Même question avec la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Théorème (Stabilité et matrice par blocs dans une base adaptée)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.
Soit V un sev de E de dimension r et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à V (les premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs d'une base de V). Alors

$$V \text{ stable par } f \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}).$$

Théorème (Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie p et n respectivement et de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

- L'application $\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

- En particulier pour tout $(f,g,h) \in (\mathcal{L}(E,F))^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$f = g \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$$

(une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice relativement à des bases fixées).

$$h = \lambda f + \mu g \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(h) = \lambda\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) + \mu\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g).$$

Remarques

Comme conséquence de ce théorème:

1) $\boxed{\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np}$.

2) ⚠ **Attention** ⚠ L'équivalence $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) \Longleftrightarrow f = g$ n'est plus vraie si on change les bases.
Contre-exemple : $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y) \end{array}$ et $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$
et $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$, $\mathcal{C} = ((0,1),(1,0))$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) =$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) =$ $\qquad\qquad$.

Par conséquent, $\boxed{\text{une même matrice peut représenter plusieurs applications linéaires}}$

3) Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ désignent les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, f est **l'application linéaire canoniquement associée à** A.

Exercice. Ecrire l'expression de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

I.3 Lien entre calcul vectoriel et calcul matriciel

Exemple Soient $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z) \end{array}$ et $\psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.

1) Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi)$ et $C = BA$. Comparer à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\psi \circ \phi)$.
2) On pose $u = (1,2,3)$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Calculer AX et comparer à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi(u))$.

Théorème (Lien calcul vectoriel et calcul matriciel)

1) Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$. Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

2) Soient E_1, E_2, E_3 trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$.
Soient $f \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, $g \in \mathcal{L}(E_2,E_3)$.
Alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f).$$

☞ **Explication** ☜ Ce théorème fondamental établit un pont entre le calcul matriciel et le calcul vectoriel. Le calcul de $f(x)$ revient au calcul de AX et la composée d'application linéaires revient à un produit de matrices. **Attention**, il faut respecter le choix des bases, et dans ce cas si X et Y désignent les matrices des vecteurs x et y, et si A, B et C désignent les matrices des applications linéaires f, g et h, on a :

$$y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX \qquad\qquad h = g \circ f \Leftrightarrow C = BA.$$

Exercice. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ de matrice relativement aux bases canoniques $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
Calculer $f(2X^2 - 3X + 4)$.

Corollaire

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$[\ \forall X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad AX = BX\ ] \Longleftrightarrow A = B.$$

$$[\ \forall X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0_{n1}\ ] \Longleftrightarrow A = 0_{np}.$$

⚠ **Attention** ⚠ Avoir $AX = BX$ pour UN X dans $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ n'implique pas $A = B$.
En clair on ne simplifie pas par X. Contre-exemple :

Définition (Noyau et image d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ écrite par bloc de colonnes $A = (C_1|\cdots|C_p)$. On définit :

- le **noyau** de A par $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = 0_{n1}\}$
- l'**image** de A par $\operatorname{Im} A = \{AX \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \ / \ X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})\} = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$.

Remarques

- **Lien entre** $\dim \operatorname{Ker} A$ **et** $\operatorname{rg} A$**.** Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A \qquad \text{et alors} \qquad \dim \operatorname{Ker} A + \operatorname{rg} A = p.$$

- **Conservation du noyau par opérations élémentaires.** Les opérations élémentaires $\boxed{\text{sur les lignes}}$ de A conservent le noyau de A.
- **Conservation de l'image par opérations élémentaires.** Les opérations élémentaires $\boxed{\text{sur les colonnes}}$ de A conservent l'image de A.

Exemple

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
2) On pose les deux applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-2x+y, x+y+3z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' - 2P(0) + XP(1) \end{array}.$$

Montrer que A est la matrice de f et de g dans les bases canoniques.

3) Déterminer alors une base de $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$, $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} g$.

Exercice. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que f est un projecteur et déterminer les éléments caractéristiques.

Théorème (Bijectivité et inversibilité)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors:

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \text{ est inversible.}$$

Dans ce cas,

$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\left(f^{-1}\right).$$

☞ **Explication** ☜ Ce théorème fondamental établit le lien entre f bijectif et l'inversibilité de sa matrice. La notion de bijection est aux applications linéaires ce que l'inversibilité est aux matrices.

I.4 Quelques résultats matriciels

Théorème (Rang d'une matrice)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

1) **Lien avec le rang d'une famille de vecteurs.** Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right) = \mathrm{rg}(\mathcal{F})$.

2) **Lien avec le rang d'une application linéare.** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)\right) = \mathrm{rg}(f)$.

Théorème (Caractérisations des matrices inversibles)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible

2) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$ ($AB = I_n$ *suffit*)

3) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$ ($BA = I_n$ *suffit*)

4) $\mathrm{Ker}\, A = \{0_n\}$ c'est-à-dire que l'équation $AX = 0_{n1}$ admet pour seule solution la solution nulle

5) $\mathrm{rg}\, A = n$.

Exercice.

1) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - 3A^2 + 2A + 3I_n = 0_n$. *On dit que le polynôme* $P = X^3 - 3X^2 + 2X + 3$ *est annulateur de* A. Montrer que A est inversible et exprimer l'inverse de A à l'aide de puissances de A.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telle $A - \lambda I_3$ est inversible.

Théorème (Propriétés du rang d'une matrice)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,
$$\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p).$$

2) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
$$\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A) \qquad \mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(B).$$

3) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$$\forall P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(AP) = \mathrm{rg}(A) \qquad \forall Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{rg}(QA) = \mathrm{rg}(A).$$

Autrement dit, $\boxed{\text{on ne modifie pas le rang d'une matrice si on la multiplie par une matrice inversible}}$.

Corollaire (Opérations élémentaires et rang)

Les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes ne modifient pas le rang d'une matrice.

Exercice. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$. Montrer que les matrices AB et BA ne peuvent être toutes les deux inversibles.

II Changement de base

II.1 Matrice de passage

Définition (Matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ i.e. si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & \dots & e'_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & p_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}.$$

Exemples Dans $\mathbb{R}^3$ soient $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}'$ la base $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$. Alors

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 + e_2 \\ e'_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}.$$

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 \\ e_2 = e'_2 - e'_1 \\ e_3 = e'_3 - e'_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{matrix}.$$

⚠ **Attention** ⚠ À l'ordre des bases: $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \neq P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ en général.

Exercice.

1) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ vers la base polaire $\mathcal{B}_\theta = (\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_\theta)$. Et la matrice de passage de $\mathcal{B}_\theta$ vers $\mathcal{B}$.

2) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ vers la base $\mathcal{B}' = (3, 2X+4, X^2-2X+1)$. Et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.

Théorème (Propriétés des matrices de passage)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors

1) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$

2) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

3) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$

4) $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Remarques (Une matrice inversible est une matrice de passage)

Réciproquement toute matrice inversible peut-être vue comme une matrice de passage. Par exemple si $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est inversible car ses coefficients diagonaux sont non nuls peut être vue comme la matrice de passage de:

- la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la la base $((1,0,0), (-1,1,0), (1,2,2))$
- la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à la base $(1, -1+X, 1+2X+2X^2)$
- la base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E à la base $(e_1, -e_1+e_2, e_1+2e_2+2e_3)$.

II.2 Changement de bases

Théorème (Formule de changement de base)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On pose les matrices de passage $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.

1) **Version coordonnées**: soit $x \in E$.
Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ alors: $\quad X = PX'$.

2) **Version application linéaire**: soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$ alors: $\quad A' = Q^{-1}AP$.

3) **Version endomorphisme**: soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ alors: $\quad A' = P^{-1}AP$.

Exercice.

1) On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x-y+z, x-3z) \end{array}$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$, $\mathcal{C}' = ((1,0), (1,1))$ deux autres bases.
Déterminer les matrices de φ , $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\varphi)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\varphi)$. Puis les matrices de passages $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$.
Vérifier alors la formule de changement de base.

2) Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $u=(1,-1)$ et $v=(2,3)$. On pose $F=\mathrm{Vect}(u)$ et $G=\mathrm{Vect}(v)$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection sur $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$.

✎ Méthode pratique ✎ (Déterminer la matrice d'une projection/symétrie dans une base $\mathcal{B}$)

On considère la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

- On détermine une base $\mathcal{B}'$ adaptée à E_1 et E_2.
- On détermine la matrice de p relativement à la base $\mathcal{B}'$.
- On détermine la matrice de p relativement à la base $\mathcal{B}$ grâce à la formule de changement de base.

Méthode similaire pour une symétrie.

☞ **Explication** ☜ L'un des intérêts majeurs du changement de bases, c'est, f étant une application linéaire donnée, trouver une base dans laquelle la matrice de f a une forme remarquable: diagonale (resp. triangulaire). On dit qu'on **diagonalise** f (resp. trigonalise f).

II.3 Matrices équivalentes

Définition (Matrices équivalentes)

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont **équivalentes** s'il existe $P\in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q\in \mathrm{GL}_n(K)$ deux matrices inversibles telles que

$$A'=QAP.$$

NB: cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition (Matrice J_r)

Soient $(p,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ et $r\leqslant \min(n,p)$. On définit la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par blocs

$$J_r(n,p)=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r}\end{array}\right).$$

$J_r(n,p)$ est une matrice de rang r appelée **matrice canonique de rang** r.

Théorème (Application linéaire de rang r)

Soient

- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n
- $f\in\mathcal{L}(E,F)$
- $r\in[\![0,\min(n,p)]\!]$.

Si $\mathrm{rg}\, f=r$ alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)=J_r(n,p).$$

Corollaire (Caractérisation du rang avec J_r)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Alors

$$\operatorname{rg}(A) = r \iff A \text{ et } J_r(n,p) \text{ sont équivalentes.}$$

Remarques

Des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de la matrice permettent de transformer la matrice A en la matrice $J_r(n,p)$.
Les opérations sur les lignes/colonne reviennent à multiplier à gauche/droite par les matrice élémentaires (inversibles).

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Transformer la matrice A en une matrice J_r.

Corollaire (Caractérisation de l'équivalence de matrices avec le rang)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

Corollaire (Rang de la transposée)

- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors : $\quad \operatorname{rg}(A^\top) = \operatorname{rg}(A)$.
- **Conséquence.** Le rang d'une matrice est égal au rang des colonnes (resp. lignes) de la matrice.

Exercice.

1) Calculer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculer le rang de la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = i + j - 1$.

Théorème (Rang et matrice extraites)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1) On dit que B est une matrice extraite de A si B est obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes de A.
2) Tout matrice extraite de A est de rang inférieur ou égal au rang de A.
3) Le rang de A est égal au plus grand des rangs des matrices carrées inversibles extraites de cette matrice.

II.4 Matrices semblables

Définition (Matrices semblables)

Soit A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont **semblables** s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

NB: cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques (Caractérisation des matrices semblables)

Deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Exercice.

1) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r est semblable à une matrice de la forme $(M \,|\, 0)$ où $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

2) Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

✎ Méthode pratique ✎ (Calcul de A^n)

- On montre que A est semblable à une matrice B plus simple (souvent diagonale, à défaut triangulaire), alors $B = P^{-1}AP$ donc $A = PBP^{-1}$.
- Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$ (qui se montre par une récurrence immédiate).
- On calcule B^n (qu'on espère simple, c'est le cas si B diagonale) on déduit alors A^n.

Exercice. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On veut calculer les itérées A^n où $n \in \mathbb{N}$ de la matrice A.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme canoniquement associé à A i.e. $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soient $u_1 = (1, 2, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, -2)$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer la matrice D de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

3) Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.

4) Après voir exprimé A en fonction de P, D et P^{-1}. Calculer A^n.

Théorème (Trace de matrices semblables)

Deux matrices semblables ont même trace.

Définition (Trace d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
La trace de la matrice de f est indépendante de la base choisie. Cette valeur commune est appelée **la trace de l'endomorphisme** f et est notée $\mathrm{Tr}(f)$.

Propriétés (de la trace d'un endomorphisme)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$.

1) **Linéarité**. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\mathrm{T}r(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{T}r(f) + \mu \mathrm{T}r(g)$.

2) **Trace d'une composée**. $\mathrm{T}r(f \circ g) = \mathrm{T}r(g \circ f)$