Décomposition en éléments simples

Exercice 1. ($\heartsuit$) Décomposer en éléments simples les fractions suivantes :

1) dans $\mathbb{C}$, $F = \dfrac{X^5+3X^4-3X^3+X-1}{X^2-1}$

2) dans $\mathbb{C}$, $F = \dfrac{X^2}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

3) dans $\mathbb{C}$, $F = \dfrac{X^4}{X^2+X+1}$

4) dans $\mathbb{C}$, $F = \dfrac{X}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$

5) dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$, $F = \dfrac{X^2}{(X^2+X+1)^2}$

6) dans $\mathbb{R}$, $F = \dfrac{1}{X^4+1}$ puis $F = \dfrac{X}{X^4+1}$

7) dans $\mathbb{R}$, $F = \dfrac{X}{(X^2+2X+3)(X-1)^2}$

8) dans $\mathbb{R}$, $F = \dfrac{X^4+1}{X^6+1}$

Exercice 2. ($\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ les fractions suivantes :

1) $F = \dfrac{1}{X^n-1}$

2) $F = \dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$

3) $F = \dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

Exercice 3. ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$ les fractions suivantes $F = \dfrac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)}$

Application de la décomposition en éléments simples

Exercice 4. ($\heartsuit$) Simplifier les sommes $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\quad T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 5. ($\heartsuit$) Calculer les dérivées n-ième de

1) $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$

2) $f(x) = \operatorname{Arctan} x$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x\cos a+1}$.

Exercice 6. ($\heartsuit$) Après avoir justifié leur existence, déterminer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$

2) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+x}$

3) $x \mapsto \dfrac{x}{x^3+1)}$

4) $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4+1)}$

5) $x \mapsto \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

6) $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

7) $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$

Exercice 7. ($*$) Résoudre l'équation différentielle : $(x^3-x)y'(x)+y(x)=0$ d'abord sur $]1,+\infty[$. Puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. ($*$)

1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}$, $F = \dfrac{1}{X^4(1-X)^4}$. *[Penser à calculer $F(1-X)$]*

2) En déduire des polynômes U et V de degré 3 tels que $UX^4+V(1-X)^4=1$.

Exercice 9. ($**$) Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\,\mathrm{i}\,k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

1) Décomposer en éléments simples $\dfrac{P(X)}{X^n-1}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega_k) = nP(0)$.

2) Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \prod_{l=0, l\neq k}^{n-1} (\omega_k - \omega_l)$.

Exercices plus théoriques

Exercice 10. ($\heartsuit$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n dont les n racines sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Décomposer $\frac{1}{P}$ et $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.
Que devient la DES de $\frac{P'}{P}$ si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux à deux distinctes de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_k$.

Exercice 11. ($**$)

1) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.
2) Soit $P = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)^{m_k}$ où les α_k sont des complexes deux à deux distincts. Décomposer $\frac{P''}{P}$ en éléments simples.
3) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P''|P$.

Exercice 12. ($*$) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si les racines de P sont réelles et simples alors $P'^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles. *On pourra utiliser la DES de* $\frac{P'}{P}$.

Exercice 13. ($*$) Calculer $\sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^3}{(z_k^2 - 1)^2}$ où z_1, z_2, z_3, z_4 sont les racines complexes de $P = X^4 - X^3 + 1$. *On pourra utiliser la DES de* $\frac{P'}{P}$.

Exercice 14. ($*$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 2$ dont a racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non nulles.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i P'(\alpha_i)} = \frac{-1}{P(0)}$.

Exercice 15. ($**$) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire, de degré n dont les racines sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

1) Monter que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \alpha_i X} = \frac{P'(\frac{1}{X})}{XP(\frac{1}{X})}$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{C} \ / \ \frac{1}{1 - \alpha_i X} = 1 + \alpha_i X + \cdots + \alpha_i^p X^p + X^{p+1} \frac{\lambda_i}{1 - \alpha_i X}.$$

2) En déduire une méthode de calcul de $S_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p$.
3) Avec $P = X^3 - X + 1$. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6.