La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Problème 1. Calcul de $\zeta(2)$.

Le but de ce problème est de déterminer la limite de la suite (s_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

I. Étude préliminaire d'un polynôme

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1) Déterminer le degré de P et préciser son coefficient dominant.

2) Démontrer que les racines de P sont toutes imaginaires pures.

3) On pose

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad x_k = -i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Rappel: La fonction cotangente est la fonction définie par cotan : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Montrer que les racines complexes de P sont les nombres x_k pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

4) En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.

On considère les deux fonctions symétriques élémentaires suivantes :

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \quad \text{et} \quad \sigma_2 = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n-1} x_p x_q$$

qui sont respectivement la somme des racines de P et la somme des produits de deux racines distinctes de P.

5) À l'aide des relations coefficients/racines, donner la valeur de σ_1 et σ_2.

6) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2$ en fonction de σ_1 et σ_2.

7) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}.$$

II. Application

Soit $p \geqslant 1$ un entier.

8) On rappelle que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$.

   En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.

9) Vérifier que $\forall x \in]0, \pi[$, $\operatorname{cotan}(\pi - x) = -\operatorname{cotan}(x)$, en déduire que

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$

10) Déduire des résultats précédents la limite de la suite (s_n) définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Problème 2. Interpolation de Lagrange

Partie I - Définition du polynôme d'interpolation de Lagrange

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$.

1) Montrer qu'il existe une famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

   On donnera l'expression de ces polynômes.

2) En déduire qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(x_j) = y_j.$$

3) Démontrer l'unicité de ce polynôme P.

4) **Application.** On pose $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

   -a- Déterminer les polynômes L_0, L_1 et L_2.

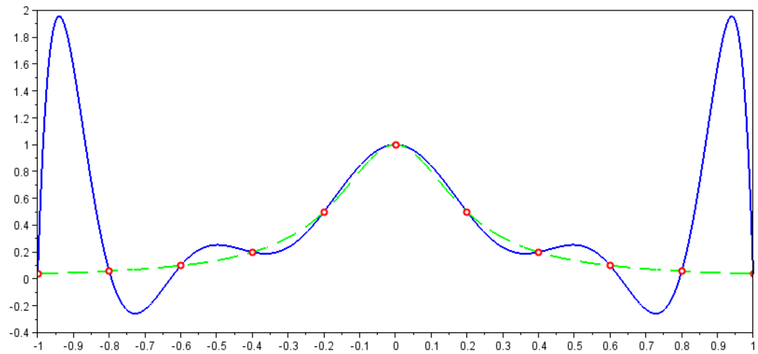
   -b- Expliciter alors l'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que

$$P(x_0) = 3, \quad P(x_1) = 5, \quad P(x_2) = 9.$$

La partie I, montre donc que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée et $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont des points distincts de $[a, b]$ alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(x_i) = f(x_i).$$

P est appelé le polynôme interpolateur de f aux points $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Graphiquement, les courbes représentatives de f et P coïncident aux points d'abscisses $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
À titre d'exemple, vous avez ci-dessous le graphe d'une fonction f (trait plein) et de son polynôme interpolateur avec $n = 10$ (traits pointillés). Les deux courbes sont confondues aux points d'interpolation mais peuvent être éloignées en dehors. On peut cependant espérer que si le nombre de points d'interpolation est grand, les deux courbes vont être "proches".



Dans la suite du problème on souhaite mesurer l'écart entre f et P.

Partie II - Estimation de l'erreur

On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des points distincts de $[a,b]$ et P le polynôme d'interpolation de f aux points $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ défini en fin de partie I.
On pose également le polynôme

$$\pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i).$$

Le but de cette partie est d'exprimer l'écart maximal entre f et P.

1) **Deux résultats préliminaires**.

   -a- Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\max\limits_{x \in [a,b]} |g(x)|$ existe. On note

$$\|g\| = \max_{x \in [a,b]} |g(x)|.$$

   -b- Soit $g \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ qui s'annule $n+2$ fois. Montrer que $g^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

2) L'objectif de cette question est de prouver :

$$\forall x \in [a,b], \quad \exists c_x \in [a,b], \quad f(x) - P(x) = \pi_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \qquad (1).$$

   -a- Montrer que la formule (1) est vraie si x est l'un des $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.
   Dans la suite, on prend $x \in [a,b]$ qui n'est pas l'un des $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et on pose avec $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - P(t) - \lambda \pi_{n+1}(t) \end{array}.$$

   -b- Justifier qu'il est possible de choisir λ tel que $\varphi(x) = 0$.
   Dans la suite, on garde ce choix pour le paramètre λ.

   -c- Justifier que φ s'annule $n+2$ fois.

   -d- En déduire la formule (1).

3) -a- Montrer que les quantités $\|f - P\|$, $\|f^{(n+1)}\|$ et $\|\pi_{n+1}\|$ sont bien définies.

   -b- En déduire à l'aide de (1),

$$\|f - P\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| \|\pi_{n+1}\| \qquad (2).$$

4) On conserve les notations précédentes et on considère la fonction $f : x \mapsto x^{n+1}$.

   -a- Démontrer que le polynôme interpolateur est $P = X^{n+1} - \pi_{n+1}$.

   -b- Que devient l'inégalité (2) dans ce cas particulier ? Que peut-on en conclure ?

Partie III - Les points de Tchebyshev

On conserve les notations de la partie II. D'après l'inégalité (2), nous voyons que pour diminuer l'écart entre f et P, il s'agit de choisir des points $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ tel que $\|\pi_{n+1}\|$ soit minimal.
Dans toute cette partie on se place sur le segment $[-1,1]$ au lieu de $[a,b]$.

1) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0=1$, $T_1=X$ et pour $n\in\mathbb{N}$,

$$T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n.$$

-a- Calculer T_2 et T_3.

-b- Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n pour $n\in\mathbb{N}$.

-c- Soit $n\in\mathbb{N}$. Prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $T_n(\cos(x))=\cos(nx)$.

-d- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(E):\cos(nx)=0$. Déterminer alors les racines de T_n.

-e- En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$T_{n+1}=2^n\prod_{i=0}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)\right).$$

2) **Dans cette question** on considère les points distincts $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$,

$$\forall i\in[\![0,n]\!],\quad x_i=\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right).$$

On note R le polynôme π_{n+1} associé,

$$R=\prod_{i=0}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)\right).$$

Montrer que :

$$\forall x\in[-1,1],\quad R(x)=\frac{1}{2^n}\cos((n+1)\operatorname{Arccos}(x)).$$

En déduire que $\|R\|=\dfrac{1}{2^n}$.

3) **Dans cette question** on revient au cas général en considérant $n+1$ points distincts $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[-1,1]$, on reprend la définition générale de π_{n+1} donnée au début de la partie II, on souhaite démontrer que $\|\pi_{n+1}\|\geqslant\dfrac{1}{2^n}$.
On raisonne par l'absurde en considérant un choix de points distincts $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[-1,1]$ tel que

$$\|\pi_{n+1}\|<\frac{1}{2^n}.$$

On pose également,

$$\forall k\in[\![0,n+1]\!],\quad y_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

-a- Démontrer que :

$$\forall k\in[\![0,n+1]\!],\quad R(y_k)=\frac{(-1)^k}{2^n}.$$

NB : R est le polynôme de la question précédente.

-b- On considère la polynôme $V=R-\pi_{n+1}$. Montrer que $V\in\mathbb{R}_n[X]$.

-c- Démontrer que pour tout $k\in[\![0,n+1]\!]$, $V(y_k)$ est du signe de $(-1)^k$.
En déduire que V s'annule au moins $n+1$ fois.

-d- Trouver l'absurdité et conclure.

On a donc montré que la meilleure majoration de l'erreur est obtenue aux points de Tchebyshev (racines de T_{n+1}) :

$$\|f-P\|\leqslant\frac{1}{2^n(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|.$$