La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

— chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
— chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
— toute question amène une réponse qui doit être encadrée
— les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
— les notations de l'énoncé doivent être respectées
— les copies doivent être numérotées
— on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
— on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

Les calculatrices sont interdites

Exercice 1 On pose $f(x) = (x+1)^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f et montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
2) -a- Déterminer la limite de f en -1. En déduire que f est prolongeable par continuité en -1. On notera encore f ce prolongement.
   -b- f est-elle dérivable en -1 ? La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet-elle une tangente au point d'abscisse -1 ?
3) -a- Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   -b- En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0. Puis donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 et sa position par rapport à la courbe représentative de f.

Exercice 2 On pose $f(x) = \sqrt{x(x+2)}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ de possède une asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation et préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
2) Même question au voisinage de $-\infty$.

Exercice 3. Fonctions qui s'annulent en un (plusieurs) point(s)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $F = \{f \in E \mid f(a) = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{x \mapsto 1\}$.
   - -a- Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - -b- Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
2) Soit a_0 et a_1 deux réels distincts. On note $F = \{f \in E \mid f(a_0) = f(a_1) = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{x \mapsto 1, x \mapsto x\}$.
   On admet que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - -a- Montrer que F et G sont en somme directe.
   - -b- En raisonnant par analyse/synthèse, montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
3) Soit $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels distincts. On note $F = \{f \in E \mid \forall i \in [\![0, n]\!],\ f(a_i) = 0\}$ et
   $G = \text{Vect}\{x \mapsto 1, x \mapsto x, \cdots x \mapsto x^n\}$.
   On admet que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
   - -a- Soit $h \in E$, montrer qu'il existe un unique élément g_I de G tel que $\forall i \in [\![0, n]\!],\ g_I(a_i) = f(a_i)$.
   - -b- En déduire que si $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$ alors cette décomposition est unique.
   - -c- Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
4) Dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$ et on veut retrouver le résultat du 3.
   On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = 0\}$.
   Avec une preuve **différente** de celle de la question 3, montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_n[X]$.

Problème

Ce problème est consacré aux applications d'un procédé appelé diagonalisation : une matrice carrée $A \in M_3(\mathbb{R})$ est dite *diagonalisable* lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire lorsqu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :

$$D = P^{-1} \times A \times P.$$

Dans ce cas, on peut obtenir des informations sur la matrice A à partir d'informations (plus facilement accessibles) sur la matrice D. Le but de ce problème est de donner quelques illustrations de cette affirmation.

Tout au long de ce problème, on pose :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

I. Diagonalisation de la matrice A

1. (a) Résoudre l'équation matricielle (P_1) : $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Déterminer les réels a et b tels que $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ soient solutions de (P_1).

   (b) Résoudre l'équation matricielle (P_2) : $AX = -X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   Déterminer le réel c tel que $X_3 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$ soit solution de (P_2).

2. (a) On considère la matrice : $P = (X_1|X_2|X_3)$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes X_1, X_2 et X_3 définis à la question précédente.
   Montrer que $AP = PL$.

   (b) Montrer que P est inversible et expliciter P^{-1} (*indication : P^{-1} est à coefficients entiers*).

II. Calcul des puissances de A

3. Pour tout entier naturel n, expliciter L^n. Justifier que cette expression de L^n reste valide si n est un entier négatif.
4. Établir par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, A^n = P \times L^n \times P^{-1}$.
5. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

III. Commutant de la matrice A

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on appelle *commutant* de la matrice B et on note $\mathcal{C}(B)$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M \times B = B \times M$.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose : $N = P^{-1} \times M \times P$.

6. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
7. Montrer $M \in \mathcal{C}(A) \Longleftrightarrow N \in \mathcal{C}(L)$.
8. En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, déterminer le commutant de L.
9. Déduire de ce qui précède qu'il existe cinq matrices $J_1, \ldots, J_5$ (que l'on ne demande pas de calculer) telles que :
$$M \in \mathcal{C}(A) \Longleftrightarrow \left[\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5 \;/\; M = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k J_k\right]$$

IV. Ensemble de matrices

La suite de ce problème est consacrée à l'étude de l'ensemble de matrices :

$$G = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \;/\; M^T \times L \times M = L\right\}.$$

10. Est-il vrai que G est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
11. Montrer que : $\forall\, (M, N) \in G^2,\ M \times N \in G$.
12. Soit $M \in G$. En remarquant que $L^2 = I_3$, justifier que M est inversible, et exprimer son inverse en fonction de M et de L.
13. Déduire de la question précédente que : $[M \in G] \Longrightarrow \left[M^{-1} \in G\right]$.
14. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_3(\mathbb{R}), \times)$, le groupe linéaire d'ordre 3.