La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :
- chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie
- chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours avec ses hypothèses exactes ou en citant le numéro d'une question précédente du problème
- toute question amène une réponse qui doit être encadrée
- les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français
- les notations de l'énoncé doivent être respectées
- les copies doivent être numérotées
- on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que l'on admet les résultats non prouvés
- on peut traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Problème 1. Étude d'une fonction définie par une intégrale.

I –Généralités

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt.$$

1) Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2) Préciser le signe de f.
3) Déterminer la monotonie de la fonction f (monotonie stricte).
4) La fonction f admet-elle des limites en 0^+ et en $+\infty$?
   Attention on ne vous demande pas pour le moment de déterminer ces limites.
5) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du$.
6) En déduire que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

II –Étude asymptotique de la fonction f

1) -a- Pour $x>0$, obtenir un encadrement de $f(x)$ de la forme :

$$Q_1(x) \leqslant f(x) \leqslant Q_2(x)$$

   où Q_1 et Q_2 sont deux fonctions rationnelles simples.

   -b- En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x\to+\infty$.
2) Justifier l'existence d'un réel $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall t\in[0,1],\quad |e^t-1| \leqslant Mt.$$

3) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{t+x}\,dt$. Montrer que la fonction g est bornée sur $]0,+\infty[$.
4) En faisant apparaître $f(x)$ dans l'expression de $g(x)$, déduire l'équivalent suivant :

$$f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x).$$

Problème 2. Suite d'intégrales

I. Étude d'une suite d'intégrales

Posons : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'intégrale J_n est bien définie.
2. Calculer J_0 et J_1.
3. Montrer que la suite (J_n) est à termes positifs ou nuls.
4. Étudier le sens de variation de la suite (J_n).
5. Établir que la suite (J_n) est convergente.
6. *(Question difficile)* Par la méthode d'intégration par parties, établir que : $J_{n+2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2+4n+5} J_n$.
   <u>*Indication :*</u> *dans une première intégration par parties, vous remarquerez que pour avoir* $v'(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-t}$ *il suffit de choisir* $v(t) = -\dfrac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))\mathrm{e}^{-t}$.
7. Déterminer les valeurs de J_2 et J_3.

II. Calcul de la limite de la suite (J_n).

Tout au long de cette partie, n désigne un entier naturel quelconque.

8. À l'aide d'un changement de variable, établir que : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
9. En déduire que : $0 \leqslant J_n \leqslant 2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
10. Montrer que pour tout réel a dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on a :
$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \leqslant a\sin^n(a) + \frac{\pi}{2} - a.$$
11. Déduire de ce qui précède la limite de (J_n).

Problème 3. Endomorphismes nilpotents.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
On note ω l'endomorphisme nul de E et Id l'endomorphisme identité.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et f endomorphisme de E , on définit par récurrence l'endomorphisme f^n par :

$$f^0 = \mathrm{Id} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \omega$.
Notons qu'alors, pour tout entier $p \geqslant n$, $f^p = \omega$.

Partie I - Trois exemples

1) Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$.
   Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (3x - y + 2z, 5x - 2y + 3z, -x - z)$.
   - -a- Déterminer une base de l'image et du noyau de f.
   - -b- Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.
2) Dans cette question $E = \mathbb{R}^n$.
   Soit : $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.
   - -a- Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   - -b- Déterminer la dimension du noyau et de l'image de l'endomorphisme φ.
   - -c- Montrer que φ est nilpotent.
3) Dans cette question $E = \mathbb{R}_n[X]$ espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit : $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$.
   - -a- Justifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   - -b- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
     Déterminer $\deg \Delta(P)$ en distinguant les cas selon que P est, ou n'est pas un polynôme constant.
   - -c- Déterminer image et noyau de Δ.
   - -d- Établir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Partie II - Indice de nilpotence

1) Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \omega$.
   Celui-ci est appelé indice de nilpotence de l'endomorphisme nilpotent f.
2) Soit f un endomorphisme nilpotent de E, on note p son indice de nilpotence.
   L'objectif de cette question est d'établir que $p \leqslant \dim E$.
   - -a- Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.
   - -b- Montrer que la famille de vecteurs $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre de E.
   - -c- Conclure.

Partie III - Commutant d'un endomorphisme nilpotent maximal

On note n la dimension de l'espace vectoriel E.
Soit f un endomorphisme nilpotent de E d'indice de nilpotence $n = \dim E$.
On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec f.

1) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2) Soit $g \in C(f)$.
   - -a- Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
   - -b- On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ les composantes du vecteur $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$.
     Exprimer, pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $g(f^k(x_0))$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.
   - -c- En déduire que $g = a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$.
3) Conclure que $C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$.
4) Déterminer la dimension de $C(f)$.