Exercice Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $f : t \mapsto te^{\frac{1}{t}}$ est dérivable sur $[x, x+1]$ car $[x, x+1] \subset \mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème des accroissements finis il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} = f'(c_x)$ c'est-à-dire $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f'(c_x)$.

$\forall t \in [x, x+1],\ f'(t) = e^{\frac{1}{t}} - \dfrac{1}{t}e^{\frac{1}{t}} = \left(\dfrac{t-1}{t}\right)e^{\frac{1}{t}}$ donc $f'(c_x) = \left(\dfrac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} c_x = +\infty$ car $c_x \geqslant x$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{c_x-1}{c_x}\right)e^{\frac{1}{c_x}} = 1$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = 1.}$

Problème 1. Calcul de $\zeta(2)$.

I. Étude préliminaire d'un polynôme

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1) D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} P &= (X+1)^n - (X-1)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^{n+1-k}\right)X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^{n+1-k}\right)X^k \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P \text{ est de degré } n-1 \text{ et a pour coefficient dominant } 2n}$.

Autrement :

$$P = ((X+1)-(X-1))\sum_{k=0}^{n-1}(X+1)^k(X-1)^{n-1-k} = 2\sum_{k=0}^{n-1}(X+1)^k(X-1)^{n-1-k}$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors les polynômes $(X+1)^k$ et $(X-1)^{n-1-k}$ sont de degrés respectifs k et $n-1-k$ et leurs coefficients dominants valent tous deux 1. Nous en déduisons que le polynôme $(X+1)^k(X-1)^{n-1-k}$ est de degré $n-1$ et a pour coefficient dominant 1.

2) Soit z appartenant à $\mathbb{C}$, alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(z) = 0 &\implies (z+1)^n = (z-1)^n \\ &\implies |z+1|^n = |z-1|^n \text{ (via les propriétés du module)} \\ &\implies |z+1| = |z-1| \text{ (car } x \longmapsto x^n \text{ est bijective de } \mathbb{R}^+ \text{ vers } \mathbb{R}^+) \\ &\implies z \in i\mathbb{R} \text{ (car } z \text{ est l'affixe d'un point de l'axe des ordonnées)} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont toutes imaginaires pures}}$.

3) Remarquons que 1 n'est pas racine de P d'après la question précédente.

Soit z appartenant à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, alors :

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(z)=0 &\iff (z+1)^n=(z-1)^n \\
&\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1 \\
&\iff \frac{z+1}{z-1}\in\mathbb{U}_n \\
&\iff \exists\, k\in[\![0,n-1]\!]\ /\ \frac{z+1}{z-1}=e^{ik\frac{2\pi}{n}} \\
&\iff \exists\, k\in[\![0,n-1]\!]\ /\ z+1=e^{ik\frac{2\pi}{n}}(z-1) \\
&\iff \exists\, k\in[\![0,n-1]\!]\ /\ z\left(1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right)=-1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}
\end{aligned}$$

Pour $k=0$, nous obtenons $0=-2$, ce qui est faux, ainsi

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(z)=0 &\iff \exists\, k\in[\![1,n-1]\!]\ /\ z=-\frac{1+e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1-e^{ik\frac{2\pi}{n}}} \\
&\iff \exists\, k\in[\![1,n-1]\!]\ /\ z=-\frac{e^{-ik\frac{\pi}{n}}+e^{ik\frac{\pi}{n}}}{e^{-ik\frac{\pi}{n}}-e^{ik\frac{\pi}{n}}} \quad \text{(par factorisation par l'angle moitié)} \\
&\iff \exists\, k\in[\![1,n-1]\!]\ /\ z=-\frac{2\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right)}{-2i\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)} \quad \text{(via les formules d'Euler)} \\
&\iff \exists\, k\in[\![1,n-1]\!]\ /\ z=x_k
\end{aligned}$$

Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, on a bien $x_k\neq 1$.

$\boxed{\text{Les racines complexes de } P \text{ sont les nombres } x_k \text{ pour } k\in[\![1,n-1]\!]}$.

4) Pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, $\dfrac{k\pi}{n}\in]0,\pi[$. La fonction cotangente étant injective sur $]0,\pi[$, les x_k sont distincts deux à deux.

D'après la question précédente, P possède $n-1$ racines complexes distinctes. Comme P est de degré $n-1$, ce sont des racines simples. De plus son coefficient dominant est $2n$, donc sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ est donnée par :

$$\boxed{P=2n\prod_{k=1}^{n-1}(X-x_k)}.$$

5) Notons :

$$\forall\, p\in[\![1,n-1]\!],\ \sigma_p=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n-1} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}$$

Nous savons que $P=2n\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-x_k)$, donc :

$$P=2n\left(X^{n-1}-\sigma_1X^{n-2}+\sigma_2X^{n-3}-\cdots+(-1)^p\sigma_pX^{n-p}+\cdots+(-1)^n\sigma_n\right).$$

OOn reprend la forme de P trouvée en 1),

$$P \ = \ (X+1)^n-(X-1)^n=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^{n+1-k}\right)X^k.$$

Ainsi P a pour termes de degrés respectifs $n-2$ et $n-3$:

$$-2n\sigma_1=\frac{n(n-1)}{2}\times 0 \quad \text{et} \quad 2n\sigma_2=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times 2.$$

Nous en déduisons que $\boxed{\sigma_1=0}$ et $\boxed{\sigma_2=\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}}$.

6) En nous inspirant de l'identité remarquable :

$$\forall\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

Nous obtenons via un raisonnement par récurrence que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + 2 \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n-1} x_p x_q,$$

soit que $\sigma_1^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + 2\sigma_2$, puis finalement que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 = -2\sigma_2}$.

7) Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 = -2\sigma_2$, alors :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(-i\,\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 = -2\frac{(n-1)(n-2)}{6},$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1} -\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 = -\frac{(n-1)(n-2)}{3},$$

d'où finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{3}}.$$

II. Application

Soit $p \geqslant 1$ un entier.

8) Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On nous rappelle que $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$. Nous en déduisons que :

$$0 < \sin^2(x) \leqslant x^2 \leqslant \tan^2(x)$$

(car la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$), puis que $\mathrm{cotan}^2(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2(x)}$ (car $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$).
Comme $\dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \mathrm{cotan}^2(x)+1$, alors :

$$\boxed{\forall\ x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \ \mathrm{cotan}^2(x) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1+\mathrm{cotan}^2(x)}.$$

9) Soit $x \in]0,\pi[$, alors $\mathrm{cotan}(\pi-x) = \dfrac{\cos(\pi-x)}{\sin(\pi-x)} = \dfrac{-\cos(x)}{\sin(x)} = -\mathrm{cotan}(x)$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in]0,\pi[,\ \mathrm{cotan}(\pi-x) = -\,\mathrm{cotan}(x)}.$$

Nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) &= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \sum_{k=p+1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \sum_{l=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{(2p+1-l)\pi}{2p+1}\right) \quad \text{(en posant } l = 2p+1-k\text{)}\\
&= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \sum_{l=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\pi - \frac{l\pi}{2p+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) + \sum_{l=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{l\pi}{2p+1}\right) \quad \text{(d'après l'égalité plus haut))}\\
&= 2\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right).
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant le résultat de la question 7) avec $n = 2p+1$ (puisque $p \geqslant 1$, alors $n \geqslant 2$) :

$$\sum_{k=1}^{2p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{2p(2p-1)}{3}.$$

D'où $2\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{2p(2p-1)}{3}$, et finalement : $\boxed{\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}}$.

10) Soit $k \in [\![1,p]\!]$, alors $\frac{k\pi}{2p+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et nous pouvons appliquer le résultat de la question 8) avec $x = \frac{k\pi}{2p+1}$:

$$\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \leqslant \frac{(2p+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

Sommons alors ces inégalités pour k allant de 1 à p :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \leqslant \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \leqslant p + \sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right),$$

et donc

$$\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\frac{p(2p-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{p\pi^2}{(2p+1)^2} + \frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\frac{p(2p-1)}{3}.$$

Or $\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\frac{p(2p-1)}{3} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4p^2} \times \frac{2p^2}{3}$, donc $\frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\frac{p(2p-1)}{3} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$.
Comme $\frac{p\pi^2}{(2p+1)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4p}$, alors par somme $\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{p\pi^2}{(2p+1)^2} + \frac{\pi^2}{(2p+1)^2}\frac{p(2p-1)}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$ et d'après le corollaire du théorème d'encadrement appliqué aux équivalents $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

Problème 2. Interpolation de Lagrange

Partie I - Définition du polynôme d'interpolation de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^{n+1}$.

1) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Les n réels x_j où $j \neq i$ sont racines de L_i, comme L_i est de degré au plus n, reste à déterminer

le coefficient dominant qui doit vérifier $L_i(x_i)=1$, donc $\boxed{L_i = \dfrac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X-x_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i-x_j)}}$.

La réciproque est immédiate, L_i est de degré n et vérifie $\forall j \in [\![0,n]\!],\ L_i(x_j)=\delta_{i,j}$.

2) On pose $P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$.
Chaque L_i est de degré n, donc par opérations, $\deg(P) \leqslant n$.
Puis, pour $j \in [\![0,n]\!]$,

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_i^j = y_j.$$

D'où $\boxed{\text{l'existence d'un polynôme } P \text{ de } \mathbb{K}_n[X] \text{ tel que :} \forall j \in [\![0,n]\!], \quad P(x_j)=y_j.}$.

3) Soit Q un autre polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0,n]\!], \quad P(x_j)=y_j$.
Alors $P-Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $(P-Q)(y_j)=0$ donc $P-Q$ admet au moins $n+1$ racines et est de degré au plus n donc $P-Q$ est nul donc $P=Q$.
$\boxed{\text{L'unicité est prouvée}}$.

4) **Application.** On pose $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$.

-a- D'après I-1),

$$L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(X-1)(X-2) \qquad L_1 = \frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} = -X(X-2) \qquad L_2 = \frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}X(X$$

-b- D'après I-2), $P = 3L0 + 5L1 + 9L_2 = \frac{3}{2}(X-1)(X-2) - 5X(X-2) + \frac{9}{2}X(X-1)$ $\quad \boxed{P = X^2+X+3.}$

Partie II - Estimation de l'erreur

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ des points distincts de $[a,b]$ et P le polynôme d'interpolation de f aux points $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ défini en fin de partie I.

1) -a- g est continue donc $[a,b]$, donc $|g|$ est **continue** sur le **segment** $[a,b]$. Donc $|g|$ admet un maximum, donc $\boxed{\|g\| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \text{ existe}}$.

-b- Soit $g \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ qui s'annule $n+2$ fois.
On pose pour $k \in [\![0,n+1]\!]$, $\mathcal{P}(k)$: "$g^{(k)}$ s'annule $n+2-k$ fois".

- $g^{(0)}$ s'annule $n+2$ fois donc la propriété est initialisée.
- Soit $k \in [\![0,n]\!]$, supposons que $\mathcal{P}(k)$ vraie, on note $a_1 < \ldots < a_{n+2-k}$, $n+2-k$ réels en lesquels $f^{(k)}$ s'annule.
On applique le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[a_i,a_{i+1}]$, $f^{(k)}$ est continue sur $[a_i,a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i,a_{i+1}[$ et $f^{(k)}(a_i)=f^{(k)}(a_{i+1})(=0)$.
Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]a_i,a_{i+1}[$ tel que $(f^{(k)})'(c_i)=0$ c'est-à-dire $(f^{(k+1)})(c_i)=0$.
Les c_i, au nombre de $n+2-k-1=n+1-k$, sont distincts (ils sont distincts des bornes a_i). Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- Pour tout $k \in [\![0,n+1]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.
En particulier, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie c'est-à-dire $\boxed{g^{(n+1)} \text{ s'annule au moins une fois sur } [a,b]}$.

2) -a- Si x est l'un des $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, alors $f(x)-P(x)=0$ et $\pi_{n+1}(x)=0$ donc tout c_x convient.
$\boxed{\text{La formule (2) est donc vraie si } x \text{ est l'un des } (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}}$.

Soit $x \in [a,b]$ qui n'est pas l'un des $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et on pose avec $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - P(t) - \lambda \pi_{n+1}(t) \end{array}.$$

-b- Comme x n'est pas une des racines de π_{n+1} alors $\pi_{n+1}(x) \neq 0$, donc λ tel que $f(x) - P(x) - \lambda \pi_{n+1}(x) = 0$ existe.

On peut expliciter la valeur de λ.

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - P(x) - \lambda \pi_{n+1}(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{f(x) - P(x)}{\pi_{n+1}(x)}}.$$

-c- Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,

$$\varphi(x_i) = f(x_i) - P(x_i) - \pi_{n+1}(x_i) = 0.$$

Et $\varphi(x) = 0$ d'après II-2)-b-. Donc $\boxed{\varphi \text{ s'annule } n+2 \text{ fois}}$.

-d- D'après II-1)-b-, il existe alors $c_x \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c_x) = 0$ c'est-à-dire

$$f^{(n+1)}(c_x) - P^{(n+1)}(c_x) - \lambda \pi_{n+1}^{(n+1)} = 0.$$

Or $\deg P \leqslant n$ donc $P^{(n+1)}$ est nul. Et $\deg(\pi_{n+1}) = n+1$ et $\mathrm{CD}(\pi_{n+1}) = 1$ donc $\pi_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!$.

On déduit :

$$f^{(n+1)}(c_x) - \lambda(n+1)! = 0.$$

En reportant la valeur de λ de II-2)-b-, on obtient le résultat voulu :

$$\boxed{f(x) - P(x) = \pi_{n+1}(x) \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}}.$$

3) -a- Comme f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$.

π_{n+1} qui est polynomiale est également continue sur le segment $[a,b]$.

Enfin $f - P$ est continue aussi sur $[a,b]$ par différence de deux fonctions qui le sont.

Donc d'après II-1)-a-, $\boxed{\|f-P\|, \|f^{(n+1)}\| \text{ et } \|\pi_{n+1}\| \text{ sont bien définies}}$.

-b- D'après (1),

$$|f(x) - P(x)| = |\pi_{n+1}(x)| \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{|(n+1)!|}.$$

Comme $x \in [a,b]$ et $c_x \in [a,b]$ alors en majorant les fonctions par leur maximum,

$$|\pi_{n+1}(x)| \leqslant \|\pi_{n+1}\| \qquad |f^{(n+1)}(c_x)| \leqslant \|f^{(n+1)}\|.$$

Donc

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\| \|f^{(n+1)}\|.$$

On passe au sup, qui est le maximum ici, on obtient

$$\|f - P\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| \|\pi_{n+1}\| \quad (2).$$

4) On pose $f : x \mapsto x^{n+1}$.

-a- $P = X^{n+1} - \pi_{n+1}$.

Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = x_i^{n+1} - \pi_{n+1}(x_i) = x_i^{n+1} = f(x_i)$.

π_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 1 donc $\deg P \leqslant n$.

Par unicité, $\boxed{P \text{ est bien le polynôme interpolateur de } f}$.

-b- Pour tout $x \in [a,b]$, $f^{(n+1)} = (n+1)!$. Puis $\|f - P\| = \|\pi_{n+1}\|$. $\boxed{\text{Donc (2) est une égalité dans ce cas}}$.

On peut en déduire que la majoration de l'erreur que nous avons obtenue est optimale au sens où c'est une égalité pour certaines fonctions.

———— Partie III - Les points de Tchebyshev ————

1) -a- $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$ et $T_3 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$

-b- Par récurrence double, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: “$\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{CD}(T_n) = 2^{n-1}$.

- **Initialisation**. Clairement $\deg T_1 = 1$ et $\deg T_2 = 2$ donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies i.e. $\deg T_n = n$ et $\deg T_{n+1} = n+1$. Par définition, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ donc par hypothèse de récurrence

$$\deg(2XT_{n+1}) = 1 + \deg(T_{n+1}) = n+2 \qquad \deg T_n = n < \deg(2XT_{n+1}).$$

Donc

$$\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg T_n) = n+2$$

puis

$$\mathrm{CD}(T_{n+2}) = \mathrm{CD}(2XT_{n+1}) = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \deg T_n = n \text{ et } \mathrm{CD}(T_n) = 2^{n-1} \text{ et } \deg(T_0) = 0,\ \mathrm{CD}(T_0) = 1.}$

-c- Par récurrence double, montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$:“pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$”.

- **Initialisation**. Clairement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0) = \cos(0x)$ et $T_1(\cos x) = \cos x = \cos(1x)$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos x) &= 2\cos x T_{n+1}(\cos x) - T_n(\cos x) && \text{(par définition de } T_n) \\ &= 2\cos x \cos((n+1)x) - \cos(nx) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \cos(x + (n+1)x) + \cos(x - (n+1)x) - \cos(nx) && (2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ &= \cos((n+2)x) + \cos(-nx) - \cos(nx) \\ &= \cos((n+2)x). \end{aligned}$$

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = \cos(nx)}$.

-d- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(E) \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right].$$

Posons alors

$$Z = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

D’après III-1)-c-, les éléments de Z sont donc DES racines de T_n.
Or T_n est de degré n donc admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité d’après le théorème de d’Alembert.
Remarquons de plus que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in]0, \pi[$ donc chacun de ces réels à un cos différent (car cos est strictement décroissante sur $]0, \pi[$) donnant ainsi LES n racines de T_n.

Par conséquent, $\boxed{\text{l’ensemble des racines de } T_n \text{ est } \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) \ / \ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}$

-e- Soit $n \in \mathbb{N}$, d’après III-1)-b- et III-1)-d- on connaît les racines de T_n (qui sont des racines simples pour cause de degré) et son coefficient dominant, donc (on remplace n par $n+1$ dans ce ce qui précède)

$$\boxed{T_{n+1} = 2^n \prod_{i=0}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)\right)}.$$

2) Avec l’expression de R et celle de T_{n+1} trouvée en III-1)-e-, on reconnaît $R = \dfrac{1}{2^n} T_{n+1}$.

Donc d'après III-1)-c),

$$\forall x \in [-1,1], \quad R(x) = \frac{1}{2^n}\cos((n+1)\operatorname{Arccos}(x)).$$

Puis pour tout $x \in [-1,1]$,

$$|R(x)| = \frac{1}{2^n}|\cos((n+1)\operatorname{Arccos}(x))| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Et $\frac{1}{2^n}$ est atteint en $x=1$ ($\cos((n+1)\operatorname{Arccos}(1)) = \cos(0) = 1$). Donc $\boxed{\|R\| = \frac{1}{2^n}}$.

3) On considère un choix de points distincts $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[-1,1]$ tel que

$$\|\pi_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}.$$

On pose également,

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!], \quad y_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

-a- Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$,

$$R(y_k) = \frac{1}{2^n}\cos\left((n+1)\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right)\right).$$

Or $\frac{k\pi}{n+1} \in [0,\pi]$ donc $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right) = \frac{k\pi}{n+1}$, donc

$$R(y_k) = \frac{1}{2^n}\cos(k\pi) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{R(y_k) = \frac{(-1)^k}{2^n}}.$$

-b- On pose $V = R - \pi_{n+1}$. V et π_{n+1} sont tous des polynômes à coefficients réels de degré $n+1$ et de coefficient dominant 1 donc $\boxed{V \in \mathbb{R}_n[X]}$.

-c- Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$, d'après III-3)-a-,

$$V(y_k) = R(y_k) - \pi_{n+1}(y_k) = \frac{(-1)^k}{2^n} - \pi_{n+1}(y_k).$$

Comme par hypothèse $\|\pi_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$, alors

$$-\frac{1}{2^n} < \pi_{n+1}(y_k) < \frac{1}{2^n}.$$

Donc

$$\frac{(-1)^k - 1}{2^n} < V(y_k) < \frac{(-1)^k + 1}{2^n}.$$

Donc $V(y_k) \begin{cases} < 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ > 0 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$. Donc $\boxed{V(y_k) \text{ est du signe de } (-1)^k}$.
V est polynomiale donc continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, entre deux changements de signe, elle s'annule. Changeant de signe $n+2$ fois, $\boxed{V \text{ s'annule donc au moins } n+1 \text{ fois}}$.

-d- Le polynôme V admet donc au moins $n+1$ racines, et comme d'après III-3)-b-, $\deg(V) \leqslant n$ alors V est nul c'est-à-dire $R = \pi_{n+1}$. Ce qui est absurde, car $\|R\| = \frac{1}{2^n}$ et $\|\pi_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$.
Par conséquent, $\|\pi_{n+1}\| \geqslant \frac{1}{2^n}$.