Exercice 1 On pose $f(x) = (x+1)^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}}$.

1) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{x+1}}{x}\ln(x+1)}$ donc :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geqslant 0 & (\text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+) \\ x+1 > 0 & (\text{car ln est définie sur } \mathbb{R}_+^*) \\ x \neq 0 & (\text{le dénominateur ne s'annule pas}) \end{cases} \Leftrightarrow x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[.$$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[}$.

Puis $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $[-1,+\infty[$, $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exp est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc par produit, quotient puis composition $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_f}$.

2) -a- Puisque $x+1 \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$ et $\sqrt{u}\ln(u) \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées) alors par composition

$$\sqrt{x+1}\ln(x+1) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par quotient $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}\ln(x+1) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$.

Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 1}.$$

Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } -1 \text{ en posant } f(-1) = 1}$.

-b- Pour $h > 0$, au voisinage de 0

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{h}}{1+h}\ln(h)} - 1}{h} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{\sqrt{h}}{1+h}\ln(h)}{h},$$

car $\dfrac{\sqrt{h}}{1+h}\ln(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\mathrm{e}^u - 1 \underset{0}{\sim} u$.

Donc

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \underset{0}{\sim} \frac{\ln(h)}{\sqrt{h}} \underset{h\to 0_+}{\longrightarrow} -\infty.$$

Donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1 \text{ et } \mathcal{C}_f \text{ admet une tangente verticale au point d'abscisse } -1}$.

3) -a- D'abord, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \mathrm{o}(x^2)$.

Et $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2)$.

Donc par produit :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x}}{x}\ln(1+x) &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + \mathrm{o}(x^2) \\ &= 1 - \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2). \end{aligned}$$

On compose ensuite avec

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \mathrm{o}(u^2).$$

On obtient,

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{1 - \frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)} \\ &= \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}\,x^2}{24} + \mathrm{o}(x^2)}.$$

-b- D'après le $DL_2(0)$ ci-dessus, la fonction est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \mathrm{e}$ (existence d'un DL_0), puis f ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (existence d'un DL_1). Enfin, $\boxed{\text{l'équation de la tangente } T_0 \text{ au point d'abscisse 0 est : } y = 1}$ (tangente horizontale), puis

$$f(x) - \mathrm{e} \underset{0}{\sim} -\frac{\mathrm{e}\,x^2}{24} \leqslant 0.$$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est sous } T_0 \text{ au voisinage de } 0}$.

Exercice 2 On pose $f(x) = \sqrt{x(x+2)}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1) Soit $x > 0$, on pose $h = \dfrac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &= \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{2}{h}}\,\mathrm{e}^h \\ &= \frac{1}{h}\sqrt{1+2h}\,\mathrm{e}^h \ \ (\text{car } h > 0). \end{aligned}$$

On utilise $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \mathrm{o}(u^2)$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1}{h}\left(1 + h - \frac{h^2}{2}\right)\left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + \mathrm{o}(h^2) \\ &= \frac{1}{h}\left(1 + 2h + h^2 + \mathrm{o}(h^2)\right) \\ &= \frac{1}{h} + 2 + h + \mathrm{o}(h). \end{aligned}$$

Donc :

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet pour asymptote la droite d'équation } y = x + 2}$.

Puis, $f(x) - (x+2) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x} > 0$ donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de l'asymptote au voisinage de } +\infty}$.

2) Au voisinage de $-\infty$, on prend désormais $x < -2$ et $h = \dfrac{1}{x} < 0$, donc en démarrant le calcul comme en 1),

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h}\sqrt{1+2h}\,\mathrm{e}^h.$$

Le reste du calcul est identique. Donc :

$$f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + \mathrm{o}_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet pour asymptote la droite d'équation } y = -x - 2}$.

Puis, $f(x) - (-x-2) \underset{-\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x} > 0$ donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de l'asymptote au voisinage de } -\infty}$.

Exercice 3. Fonctions qui s'annulent en un (plusieurs) point(s)

1) -a- En tant que sous-espace engendré par une partie, $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$

Pour F on utilise le théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriels :
- $F \subset E$.
- La fonction nulle appartient à F donc $F \neq \emptyset$.
- Soit $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda f + g)(a) = \lambda f(a) + g(a) = \lambda \times 0 + 0 = 0$ donc $\lambda f + g \in F$.

$\boxed{F \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } E.}$

-b- • Soit $h \in F \cap G$, $h \in G$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \lambda$.
De plus $h \in F$ donc $h(a) = \lambda = 0$ donc $h = 0_E$ donc $F \cap G = \{0_E\}$ (1).

• Soit $h \in E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $h = (h - \lambda) + \lambda$.
$[x \mapsto \lambda] \in G$ et

$$\begin{aligned} h - \lambda \in F &\iff h(a) - \lambda = 0 \\ &\iff \lambda = h(a)\ (*) \end{aligned}$$

Donc $h = \underbrace{(h - h(a))}_{\in F} + \underbrace{h(a)}_{\in G}$ est une décomposition de h dans $F + G$, $E = F + G$ (2).

Avec (1) et (2), $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$
Rq : l'unicité de λ en $(*)$ redonne que la somme est directe.

2) -a- Soit $h \in F \cap G$, $h \in G$ donc h est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1. De plus $h \in F$ donc h admet au moins deux racines distinctes.
On en déduit que $h = 0_E$. $F \cap G = \{0_E\}$, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont en somme directe.}}$

-b- Soit $h \in E$.
Analyse : On suppose que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

$f \in F$ donc $\begin{cases} g(a_0) = h(a_0) \\ g(a_1) = h(a_1) \end{cases}$.

$a_0 \neq a_1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{h(a_1) - h(a_0)}{a_1 - a_0}(x - a_0) + h(a_0)$.

$\left(y = \dfrac{h(a_1) - h(a_0)}{a_1 - a_0}(x - a_0) + h(a_0)\right.$ est une équation de la droite passant par les points $(a_0, h(a_0))$ et $\left.(a_1, h(a_1))\right)$.
On a l'unicité de g et donc celle de $f = h - g$.
Rq : cette unicité nous redonne que la somme est directe.

Synthèse : On pose $g :\ x \mapsto \dfrac{h(a_1) - h(a_0)}{a_1 - a_0}(x - a_0) + h(a_0)$ et $f = h - g$.
On a $g \in G$.
$f(a_0) = h(a_0) - g(a_0) = h(a_0) - h(a_0) = 0$ et par un calcul similaire $f(a_1) = 0$ donc $f \in F$.
Ainsi $h = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g}_{\in G}$.

On a montré que $E = F + G$. La somme étant directe, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

3) -a- Remarquons que G est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
Soit $h \in E$. D'après les formules d'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme P_I de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P_I(a_i) = f(a_i).$$

On note g_I la fonction polynomiale associée à P_I.
$\boxed{g_I \text{ est l'unique élément de } G \text{ vérifiant } \forall i \in [\![0, n]\!],\ g_I(a_i) = f(a_i).}$

-b- On suppose que $h = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.
$f \in F$ donc $\forall i \in [\![0, n]\!],\ h(a_i) = f(a_i) + g(a_i) = 0 + g(a_i) = g(a_i)$.
Avec l'unicité du 3.a, $g = g_I$ puis $f = h - g_I$. $\boxed{\text{La décomposition est unique.}}$

-c- Soit $h \in E$, on lui associe la fonction g_I du 3.c. On pose $f = h - g_I$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $f(a_i) = h(a_i) - g(a_i) = h(a_i) - h(a_i) = 0$ donc $f \in F$.
Ainsi $h = \underbrace{f}_{\in F} + \underbrace{g_I}_{\in G}$.

On a montré que $E = F + G$. La somme étant directe, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$

4) Les a_i étant distincts deux à deux $F = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; \prod_{i=0}^{n} (X - a_i) \text{ divise } P \right\}$.

$\deg\left(\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)\right) = n + 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on forme la division euclidienne de P par $\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$.

Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \left(\prod_{i=0}^{n}(X - a_i)\right) Q + R$.

L'existence et l'unicité du couple (Q, R) assurent l'existence et l'unicité de la décomposition de P et donc que $\boxed{\mathbb{R}[X] = F \oplus \mathbb{R}_n[X].}$

Problème

Tout au long de ce problème, on pose :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

I. Diagonalisation de la matrice A

1. (a) Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et résolvons l'équation matricielle $(P_1)\ :\ AX = X$:

$$\begin{aligned}
(P_1) \quad &\iff \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 4x & -8y & -4z & = & 0 \\ 4x & -8y & -4z & = & 0 \\ -2x & +4y & +2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff -x + 2y + z = 0
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est $\boxed{S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ -x+2y+z=0 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$.

Nous en déduisons que $X_1 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, soit que $\boxed{a=2}$, puis que $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit que $\boxed{b=1}$.

(b) Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et résolvons l'équation matricielle (P_2) : $AX = -X$:

$$\begin{aligned}
(P_2) \quad &\iff \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} 6x & -8y & +\boxed{(-4)}z & = & 0 & L_1 \\ 4x & -6y & -4z & = & 0 & L_2 \leftarrow \boxed{1}L_2 - L_1 \\ -2x & +4y & +4z & = & 0 & L_3 \leftarrow \boxed{1}L_3 + 2L_2 - L_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 6x & -8y & +\boxed{(-4)}z & = & 0 \\ -2x & +2y & +0 & = & 0 \\ 0 & +0 & +0 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff x = -2z \text{ et } x = y
\end{aligned}$$

L'ensemble solution est $\boxed{S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ x=-2z \text{ et } y=x \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$.

Nous en déduisons que $X_3 = -\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, soit que $\boxed{c=2}$.

2. (a) Considérons la matrice : $P = \left(X_1 \,\middle|\, X_2 \,\middle|\, X_3 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors en calculant par blocs :

$$AP = \left(AX_1 \,\middle|\, AX_2 \,\middle|\, AX_3 \right) = \left(X_1 \,\middle|\, X_2 \,\middle|\, -X_3 \right) = \left(X_1 \,\middle|\, X_2 \,\middle|\, X_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = DP.$$

On a bien $\boxed{AP = PL}$.

(b) Posons : $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ où b_1, b_2 et b_3 sont trois réels arbitraires, et résolvons le système $PX = B$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est un triplet de réels inconnus. On a :

$$\begin{aligned}
PX = B \quad &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} & x_2 & +2x_3 & = & b_1 & L_1 \leftarrow L_3 \\ -x_1 & & +2x_3 & = & b_2 & L_2 \leftarrow L_1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & b_3 & L_3 \leftarrow L_2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & b_3 \\ & x_2 & +2x_3 & = & b_1 \\ -x_1 & & +2x_3 & = & b_2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & b_3 \\ & x_2 & +2x_3 & = & b_1 \\ & x_2 & +3x_3 & = & b_3 + 2b_2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & b_3 \\ & x_2 & +2x_3 & = & b_1 \\ & & x_3 & = & b_3 + 2b_2 - b_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 & = & 4b_3 + 6b_2 - 4b_1 \\ x_2 & = & 3b_1 - 4b_2 - 2b_3 \\ x_3 & = & b_3 + 2b_2 - b_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2b_3 + 3b_2 - 2b_1 \\ x_2 = 3b_1 - 4b_2 - 2b_3 \\ x_3 = b_3 + 2b_2 - b_1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que : $\boxed{P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$.

II. Calcul des puissances de A

3. La matrice L étant diagonale, on a : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}}$. Cette égalité est encore valable lorsque $n < 0$ car les coefficients diagonaux de L sont non nuls.
4. D'après la question 2. , on a : $P^{-1}AP = L$. Il s'ensuit après multiplication à gauche par P et à droite par P^{-1} que : $A = PLP^{-1}$.
Notons à présent, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $A^n = PL^nP^{-1}$.
— **Initialisation :**Puisque $A^0 = I_3$ et $PL^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
— **Hérédité :** Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n.
On a $A^{n+1} = A^n \times A$, et en utilisant la remarque faite ci-dessus (à savoir $A = PLP^{-1}$), et l'hypothèse de récurrence $\big(A^n = PL^nP^{-1}\big)$, on obtient :
$$A^{n+1} = PL^nP^{-1}PLP^{-1} = PL^nI_3LP^{-1} = PL^nLP^{-1} = PL^{n+1}P^{-1},$$
et cette dernière écriture signifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui prouve l'hérédité.
— **Conclusion :** $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, A^n = P \times L^n \times P^{-1}}$.
5. Soit n un entier naturel quelconque. D'après la question précédente : $A^n = PL^nP^{-1}$.
La question 3. nous conduit alors à distinguer deux cas :
— Premier cas : Si n est pair, alors $L^n = I_3$, d'où $A^n = PI_3P^{-1}$, soit $A^n = I_3$.
— Deuxième cas : Si n est impair, alors $L^n = L$, d'où : $A^n = PLP^{-1}$, soit $A^n = A$.
Conclusion : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{Z},\ A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \text{ est pair} \\ A & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$

III. Commutant de la matrice A

6. On utilise la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
— Tout d'abord, $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
— Puis, $0_3 \in \mathcal{C}(A)$ car $0_3A = A0_3 (= 0_3)$ donc $\mathcal{C}(A) \neq \emptyset$.
— Enfin, soit $(M_1, M_2) \in (\mathcal{C}(A))^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\begin{aligned} A(\lambda M_1 + M_2) &= \lambda AM_1 + AM_2 \\ &= \lambda M_1A + M_2A \qquad \text{car } (M_1, M_2) \in (\mathcal{C}(A))^2 \\ &= (\lambda M_1 + M_2)A. \end{aligned}$$
Donc $\lambda M_1 + M_2 \in \mathcal{C}(A)$.
Donc $\boxed{\mathcal{C}(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
7. Pour $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, posons $N = P^{-1} \times M \times P$. On a alors : $M = P \times N \times P^{-1}$.
De manière analogue, puisque $P^{-1} \times A \times P = L$ d'après la question précédente, on a : $A = P \times L \times P^{-1}$. Par suite :
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\iff M \times A = A \times M \\ &\iff P \times N \times P^{-1} \times P \times L \times P^{-1} = P \times L \times P^{-1} \times P \times N \times P^{-1} \\ &\iff P \times N \times L \times P^{-1} = P \times L \times N \times P^{-1} \\ &\iff N \times L = L \times N \end{aligned}$$
La dernière équivalence étant obtenue en multipliant à gauche (resp. à droite) les deux termes de l'avant-dernière égalité par P^{-1} (resp. par P). Finalement, nous avons établi que :
$$\boxed{M \in \mathcal{C}(A) \iff N \in \mathcal{C}(L) \quad (\text{où } N = P^{-1} \times M \times P)}.$$
8. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe 9 réels $a, b, \ldots, i$ tels que : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Avec cette notation, on a :
$$\begin{aligned} N \times L = L \times N &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & -c \\ d & e & -f \\ g & h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \\ &\iff [c = f = g = h = 0] \end{aligned}$$
En résumé : $N \times L = L \times N \iff \exists\ (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5\ /\ N = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.
Conclusion : $\boxed{\{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), N \times L = L \times N\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix},\ (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}^5 \right\}}$.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la question 3. : $M \times A = A \times M \Longleftrightarrow N \times L = L \times N$.
Or, d'après la question précédente :

$$N \times L = L \times N \Longleftrightarrow \left[\exists\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5\ /\ N = \alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33}\right]$$

où l'on a noté : $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Nous en déduisons que :

$$MA = AM \Longleftrightarrow \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5\ /\ M = P\left(\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} + \alpha_5 E_{33}\right) P^{-1}$$

Finalement :

$$\boxed{M \times A = A \times M \Longleftrightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5, M = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k J_k,}$$

avec $\boxed{J_1 = P \times E_{11} \times P^{-1}, \dots, J_5 = P \times E_{55} \times P^{-1}}$.

IV. Ensemble de matrices

Rappelons

$$G = \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ /\ M^T \times L \times M = L\right\}.$$

10. La matrice nulle $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ n'appartient pas à G (car : $M^T \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times M = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \neq L$). Donc $(G, +)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$. Ainsi : $\boxed{(G, +, \times) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)}$.

11. Soient M et N deux éléments de G. Alors :

$$(MN)^T L(MN) = N^T \times \underbrace{M^T \times L \times M}_{=L \text{ car } M \in G} \times N = \underbrace{N^T \times L \times N}_{=L \text{ car } M \in G} = L$$

En résumé : $(MN)^T L(MN) = L$. D'où : $MN \in G$.
Conclusion. $\boxed{\forall\ (M, N) \in G^2,\ M \times N \in G}$.

12. Soit $M \in G$. Alors : $M^T \times L \times M = L$. En multipliant à gauche les deux termes de cette égalité par L, on obtient : $L \times M^T \times L \times M = L^2$. Puisque $L^2 = I_3$, on peut réécrire cette égalité : $\left(L \times M^T \times L\right) \times M = I_3$.
Cette dernière signifie exactement que M est inversible, et que son inverse est : $L \times M^T \times L$.
Conclusion : $\boxed{\forall\ M \in G,\ M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ et } M^{-1} = L \times M^T \times L}$.

13. Supposons que $M \in G$.
D'après la question précédente, M est inversible, et : $M^{-1} = L \times M^T \times L$. Or,

$$\begin{aligned} \left(L \times M^T \times L\right)^T \times L \times \left(L \times M^T \times L\right) &= L \times M \times L \times L \times L \times M^T \times L \\ &= L \times M \times L \times M^T \times L \\ &= L \times \left(M^T \times L \times M\right)^T \times L \\ &= L \times L \times L \\ &= L \end{aligned}$$

Dans la suite d'égalités précédente, on a utilisé que L est symétrique (car diagonale), donc égale à sa transposée, que M est un élément de G (d'où : $M^T \times L \times M = L$) et enfin que $L^2 = I_3$.
Finalement on a établi que : $\left(L \times M^T \times L\right)^T \times L \times \left(L \times M^T \times L\right) = L$, soit :

$$\left(M^{-1}\right)^T \times L \times M^{-1} = L.$$

En d'autres termes : $M^{-1} \in G$. Conclusion : $\boxed{\forall\ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ M \in G \Longrightarrow M^{-1} \in G}$.

14. Employons une caractérisation des sous-groupes.
— D'après la question 12., tout élément de G est inversible, donc $G \subset \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$.
— Puisque $I_3^T \times L \times I_3 = L$, alors $I_3 \in G$ et $G \neq \emptyset$.
— D'après la question 11., le produit de deux éléments de G est encore un élément de G, et d'après la question 12., l'inverse d'un élément de G est encore dans G.
Conclusion : $\boxed{(G, \times) \text{ est un sous-groupe de } (\mathcal{GL}_3(\mathbb{R}), \times)}$.