Problème 1. Étude d'une fonction définie par une intégrale.

Partie I

1) Soit $x \in]0,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{e^t}{t+x}$ est continue sur $[0,1]$ donc $\boxed{f \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[.}$

2) Soit $x \in]0,+\infty[$. $\forall t \in [0,1]$, $\quad \dfrac{e^t}{t+x} > 0$
Par intégration bornes strictement croissantes d'une fonction continue à valeurs positives et non identiquement nulle sur $[0,1]$, $\boxed{f(x) > 0.}$

3) Soit $x, y \in]0,+\infty[$, on suppose que $x < y$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $\quad \dfrac{e^t}{t+y} < \dfrac{e^t}{t+x}$ donc $\dfrac{e^t}{t+x} - \dfrac{e^t}{t+y} > 0$.
Par intégration bornes strictement croissantes d'une fonction continue positive à valeurs positives et non identiquement nulle sur $[0,1]$,
$$\int_0^1 \left(\frac{e^t}{t+x} - \frac{e^t}{t+y}\right) dt > 0 \text{ donc } f(x) > f(y).$$
$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } \mathbb{R}_+^*.}$

4) Le théorème de la limite monotone nous assure l'existence des limites de f en 0^+ et en $+\infty$. On peut préciser que comme f est à valeurs positives, la limite en $+\infty$ est finie.

5) Soit $x > 0$, on effectue le changement de variable affine $u = t + x$, $\quad du = dt$.

Pour $t = 0$, $u = x$.
Pour $t = 1$, $u = x + 1$.
$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u}\, du = \int_x^{x+1} \frac{e^u e^{-x}}{u}\, du$$
$$\boxed{f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\, du.}$$

6) On pose pour tout réel $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\, du$. On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^{-x}F(x)$.
$u \mapsto \dfrac{e^u}{u}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des primitives sur cet intervalle. On note G l'une de ces primitives.
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = G(x+1) - G(x).$$
G est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = G'(x+1) - G'(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}.$$
Par opérations, F' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par produit, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

Partie II

1) -a- Soit $x > 0$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $0 < x \leqslant t + x \leqslant x + 1$ donc $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{t+x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
$e^t > 0$ donc $\dfrac{e^t}{x+1} \leqslant \dfrac{e^t}{t+x} \leqslant \dfrac{e^t}{x}$.
Par intégration bornes croissantes,
$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+1}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{x}\, dt$$
et donc $\boxed{\dfrac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e-1}{x}.}$

-b- $\dfrac{e-1}{x+1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$.

Le théorème d'équivalence par encadrement appliqué à l'inégalité du 1.a donne alors que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e-1}{x}.}$$

2) La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis la fonction exponentielle est $M-$lipschitzienne sur $[0,1]$ avec
$M = \max_{t\in[0,1]} |\exp'(t)| = e.$

En particulier $\forall t \in [0,1], \quad |e^t - 1| \leqslant e|t-0|.$

$$\forall t \in [0,1], \quad |e^t - 1| \leqslant et.$$

Rq : la valeur de M n'était pas demandée.

3) Soit $x > 0$. $0 < 1$ donc $|g(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{e^t-1}{t+x}\right| dt.$

Par intégration bornes croissantes en utilisant l'inégalité du 2,

$$|g(x)| \leqslant M \int_0^1 \frac{t}{t+x}\,dt \leqslant M \int_0^1 1\,dt$$
$$|g(x)| \leqslant M.$$

$\boxed{g \text{ est bornée sur }]0,+\infty[.}$

4) Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - \int_0^1 \frac{1}{t+x}\,dt \\ &= f(x) - (\ln(x+1) - \ln x) \end{aligned}$$
$$f(x) = -\ln x + (g(x) + \ln(x+1))$$

$x \mapsto \ln(x+1)$ admet une limite finie en 0 donc est bornée au voisinage de 0^+. Avec le 3, on a donc que $x \mapsto g(x) + \ln(x+1)$ est bornée au voisinage de 0^+. Comme $\ln x \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} -\infty$, en particulier

$$g(x) + \ln(x+1) \underset{x\to0^+}{=} o(-\ln x)$$

Par suite,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -\ln(x).}$$

Problème 2. Suite d'intégrales

I. Étude d'une suite d'intégrales

Posons : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ J_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est bien définie.}}$

2. On a : $J_0 = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\pi$ d'où : $\boxed{J_0 = 1 - \mathrm{e}^{-\pi}}$.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Im}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(i-1)t}\ \mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(i-1)t}}{i-1}\right]_0^\pi\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{i-1}(-e^{-\pi}-1)\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{-1-i}{2}(-e^{-\pi}-1)\right) \\ &= \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2} \end{aligned}$$

d'où : $\boxed{J_1 = \frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}}$.

3. Soit n un entier naturel. Sur $[0,\pi]$, la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}$ est à valeurs positives. Comme $0<\pi$, par positivité de l'intégrale, nous en déduisons que : $\displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.

   Conclusion : $\boxed{\forall\ n\in\mathbb{N},\ J_n \geqslant 0}$.
4. Soit n un entier naturel. On a, par linéarité de l'intégrale :
$$J_{n+1}-J_n=\int_0^\pi \sin^{n+1}(t)\mathrm{e}^{-t}-\sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t=\int_0^\pi \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}(\sin(t)-1)\mathrm{d}t$$
   Or, pour tout réel t entre 0 et π on a : $\sin^n(t)\geqslant 0$, $e^{-t}\geqslant 0$ et $\sin(t)-1\leqslant 0$.
   Ainsi $\forall\ t\in[0,\pi],\ \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}(\sin(t)-1)\leqslant 0$.
   Nous en déduisons que : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ J_{n+1}-J_n\leqslant 0$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la suite } (J_n) \text{ est décroissante}}$.
5. La suite (J_n) est décroissante d'après la question précédente et minorée par 0 d'après la question 2.. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{la suite } (J_n) \text{ converge}}$.
6. Soit n un entier naturel. Écrivons judicieusement :
$$J_{n+2}=\int_0^\pi \sin^{n+1}(t)\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t,$$
   puis posons pour tout réel t entre 0 et π :
$$\left\{\begin{array}{l} u(t)=\sin^{n+1}(t)\\ v(t)=-\dfrac{1}{2}(\cos(t)+\sin(t))\mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.\quad \text{de telle sorte que :}\quad \left\{\begin{array}{l} u'(t)=(n+1)\sin^n(t)\cos(t)\\ v'(t)=\sin(t)\mathrm{e}^{-t}\end{array}\right.$$
   Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, nous pouvons effectuer une intégration par parties pour obtenir :
$$\begin{aligned} J_{n+2} &= -\frac{1}{2}\underbrace{\left[\sin^{n+1}(t)(\cos(t)+\sin(t))\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\pi}_{=0}+\frac{n+1}{2}\int_0^\pi(\cos(t)+\sin(t))\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\cos(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{n+1}{2}\left[\int_0^\pi \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t+\int_0^\pi \sin^{n+1}(t)\cos(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$
   Posons alors $H_n=\displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\cos^2(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ et $K_n=\displaystyle\int_0^\pi \sin^{n+1}(t)\cos(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.
   Nous avons ainsi : $J_{n+2}=\dfrac{n+1}{2}(H_n+K_n)$ $(\clubsuit)$.
   Nous avons aussi :
$$H_n=\int_0^\pi \sin^n(t)\left(1-\sin^2(t)\right)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t=\int_0^\pi \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t-\int_0^\pi \sin^{n+2}(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t=J_n-J_{n+2}\ (\diamondsuit).$$
   Par ailleurs, et par le biais d'une nouvelle intégration par parties :
$$K_n=\int_0^\pi \underbrace{\sin^{n+1}(t)\cos(t)}_{u'(t)}\underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{v(t)}\mathrm{d}t=\underbrace{\left[\frac{\sin^{n+2}(t)}{n+2}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\pi}_{=0}+\frac{1}{n+2}\int_0^\pi \sin^{n+2}(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n+2}J_{n+2}\ (\heartsuit).$$
   Nous déduisons de $(\clubsuit)$, $(\diamondsuit)$ et $(\heartsuit)$ que :
$$\begin{aligned} J_{n+2} &= \frac{n+1}{2}\left[J_n-J_{n+2}+\frac{1}{n+2}J_{n+2}\right]\\ &= \frac{n+1}{2}\left[J_n-\frac{n+1}{n+2}J_{n+2}\right]\\ \left(1+\frac{(n+1)^2}{2(n+2)}\right)J_{n+2} &= \frac{n+1}{2}J_n\\ \frac{n^2+4n+5}{2(n+2)}J_{n+2} &= \frac{n+1}{2}J_n\\ J_{n+2} &= \frac{(n+1)(n+2)}{n^2+4n+5}J_n\end{aligned}$$
7. D'après la question précédente et la question 2. : $J_2=\dfrac{2}{5}J_0$ D'où : $\boxed{J_2=\dfrac{2}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}$.

   et $J_3=\dfrac{3}{5}J_1=\dfrac{3}{5}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}$. D'où : $\boxed{J_3=\dfrac{3}{10}\left(1+\mathrm{e}^{-\pi}\right)}$.

II. Calcul de la limite de la suite (J_n).

Tout au long de cette question, n désigne un entier naturel quelconque.

8. Soit n un entier naturel. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\mathrm{d}t$, effectuons le changement de variable : $u=\pi-t$. La fonction $t\longmapsto \pi-t$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et lorsque t varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, u varie de π à $\dfrac{\pi}{2}$, et $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$. Nous obtenons donc :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_\pi^{\pi/2} \sin^n(\pi - u)(-\mathrm{d}u) = -\int_\pi^{\pi/2} \sin^n(\pi - u)\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^n(u)\mathrm{d}u$$

Finalement : $\boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{d}t}$.

9. Soit n un entier naturel. Remarquons que : $\forall\ t \in [0, \pi],\ 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$.
D'où : $\forall\ t \in [0, \pi],\ 0 \leqslant \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \sin^n(t)$ (la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ étant positive sur $[0, \pi]$).
Par croissance de l'intégrale et comme $0 \leqslant \pi$, nous en déduisons que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

Puis d'après la relation de Chasles et 8., il vient comme voulu

$$\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t}.$$

10. Soit a un réel dans $\left]0; \dfrac{n}{2}\right[$. D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{a} \sin^n(t)\mathrm{d}t + \int_a^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t\ (\clubsuit).$$

Puisque la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est positive et croissante sur $[0, a]$, on a :

$$\forall\ t \in [0, a],\ 0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant \sin^n(a)$$

D'où, par croissance de l'intégrale et comme $0 \leqslant a$:

$$0 \leqslant \int_0^{a} \sin^n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{a} \sin^n(a)\mathrm{d}t$$

Soit : $0 \leqslant \int_0^{a} \sin^n(t)\mathrm{d}t \leqslant a\sin^n(a)$ $(\diamondsuit)$.
Par ailleurs, puisque la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est positive et majorée par 1 sur $\left[a, \dfrac{\pi}{2}\right]$, nous avons :

$$\forall\ t \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right],\ 0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant 1.$$

D'où, par croissance de l'intégrale et comme $a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$:

$$0 \leqslant \int_a^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{\pi/2} 1\ \mathrm{d}t \quad \textit{i.e.}\ : 0 \leqslant \int_a^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} - a\ (\heartsuit).$$

Nous en déduisons de $(\clubsuit)$, $(\diamondsuit)$ et $(\heartsuit)$ que : $\boxed{\forall\ a \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[,\ \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \leqslant a\sin^n(a) + \frac{\pi}{2} - a}$.

11. D'après 9. et 10.,

$$0 \leqslant J_n \leqslant 2a\sin^n(a) + \pi - 2a.$$

D'après 5., on peut noter l la limite de (J_n). Puis comme $a \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, $0 < \sin(a) < 1$ donc $\sin^n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut donc passer l'inégalité ci-dessus à la limite :

$$0 \leqslant l \leqslant \pi - 2a, \quad \text{ce pour tout } a \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

On peut donc faire tendre a vers $\dfrac{\pi}{2}$, pour obtenir $l = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \sin^n(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 0}.$$

Problème 3. Endomorphismes nilpotents.

Partie I - Trois exemples

1) -a- Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$, où :

$$f(e_1) = (3, 5, -1) \qquad f(e_2) = (-1, -2, 0) \qquad f(e_3) = (2, 3, -1).$$

On remarque que : $(*)$ $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$, donc

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2)).$$

Puis $(f(e_1), f(e_2))$ est libre car les deux vecteurs ne sont pas proportionnels.
Finalement : $\boxed{(f(e_1), f(e_2)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$.
Puis, $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, donc d'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f = 3 - 2 = 1.$$

Avec $(*)$, $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 = (1, 1, -1) \in \operatorname{Ker} f$.
Donc (ε_1) est une famille de $\operatorname{Ker} f$, libre car $\varepsilon_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\operatorname{Card}((\varepsilon_1)) = \dim \operatorname{Ker} f$ donc par une caractérisation des bases $\boxed{(\varepsilon_1) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$.

-b- On peut calculer successivement :

$$f^2(e_1) = (2, 2, -2) \qquad f^2(e_2) = (-1, -1, 1) \qquad f^2(e_3) = (1, 1, -1)$$
$$f^3(e_1) = f^3(e_2) = f^3(e_3) = (0, 0, 0).$$

Donc f coincide avec l'application nulle sur la base canonique donc $\boxed{f^3 = \omega}$.

Autrement : on peut aussi mener le calcul fastidieux de $f^3(x, y, z)$ et trouver $f^3(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2) -a- On a bien $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
Puis soient $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda u + v) = \varphi(\lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_n + y_n) = (0, \lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_{n-1} + y_{n-1}) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$.

-b- Soit $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$u \in \operatorname{Ker} \varphi \Leftrightarrow \varphi(u) = (0, \ldots, 0) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}(\varepsilon)$ où $\varepsilon = (0, \ldots, 0, 1)$.
De plus $\varepsilon \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ donc (ε) est libre donc (ε) est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\boxed{\dim \operatorname{Ker} \varphi = 1}$.
Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, par le théorème du $\operatorname{rg} \varphi = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Ker} \varphi$ donc $\boxed{\operatorname{rg} \varphi = n - 1}$.

-c- Soit $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on calcule successivement

$$\varphi^2(x_1, \ldots, x_n) = (0, 0, x_1, \ldots, x_{n-2}), \quad \ldots, \quad \varphi^{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, x_1) \qquad \varphi^n(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0).$$

Finalement $\varphi^n = \omega$ et $\boxed{\varphi \text{ est donc un endomorphisme nilpotent}}$.

3) -a- On a bien $\Delta : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ car pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P(X+1)) = \deg P \leqslant n$ alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Puis soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X)) = \lambda\Delta(P) + \Delta(Q).$$

Donc $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

-b- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Si P est constant, alors $P(X+1) = P(X)$ donc $\Delta(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $\deg(\Delta(P)) = -\infty$.
- Sinon, posons $P = a_p X^p + Q$ où $a_p \in \mathbb{R}^*$ est le coeffficient dominant de P et $\deg(Q) \leqslant p - 1$. Alors

$$\Delta(P) = a_p((X+1)^p - X^p) + Q(X+1) - Q(X) = a_p \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k + Q(X+1) - Q(X) = pa_p X^{p-1} + a_p \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p}{k} X^k + Q(X+1) - Q(X).$$

Comme $\deg(Q) = \deg(Q(X+1))$ et $\operatorname{CD}(Q) = \operatorname{CD}(Q(X+1))$ donc $\deg(Q(X+1) - Q(X)) \leqslant p - 2$, on en déduit $\boxed{\deg(\Delta(P)) = p - 1}$.

-c- D'après ce qui précède $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$.

Puis comme $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie alors d'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Im} \Delta = \dim \mathbb{R}^{n+1} - \dim \operatorname{Ker} \Delta = n.$$

Par ailleurs d'après 3)-b-, $\operatorname{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$.
Il s'ensuit que $\boxed{\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}_n[X]}$.

-d- Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg \Delta(P) \leqslant \deg P - 1$ donc $\deg \Delta^2(P) \leqslant \deg P - 2$.
On répète ce procédé, pour finalement obtenir $\deg \Delta^{n+1}(P) \leqslant \deg P - n + 1 < 0$ donc $\Delta^{n+1}(P) = 0$.
Ainsi $\Delta^{n+1} = \omega$ et $\boxed{\Delta \text{ est nilpotent}}$.

Partie II - Indice de nilpotence

1) Soit f un endomorphisme nilpotent de E.
Soit $A = \{n \in \mathbb{N} / f^n = \omega\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$ non vide car f est supposé nilpotent donc A possède un plus petit élément, c'est notre indice de nilpotence.

2) Soit f un endomorphisme nilpotent de E, on note p son indice de nilpotence.

-a- Par minimalité de p, on a $f^{p-1} \neq \omega$. Donc $\boxed{\text{il existe } x_0 \in E \text{ tel que } f^{p-1}(x_0) \neq 0_E}$.

-b- Posons $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E \quad (*).$$

On applique f^{p-1} linéaire à $(*)$, on utilise $f^k = \omega$ pour $k \geqslant p$,

$$\lambda_0 f^{p-1}(x_0) + 0_E = 0_E.$$

Or $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ donc $\lambda_0 = 0$.
On reporte dans $(*)$,

$$\lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0_E \quad (*).$$

On applique ensuite f^{p-2} pour obtenir $\lambda_1 f^{p-1}(x_0) = 0_E$ et donc $\lambda_1 = 0$.
Puis de proche en proche, on obtient :

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0.$$

Donc $\boxed{\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est libre}}$.

-c- $\mathcal{B}$ est une famille libre de E, on peut donc comparer son cardinal à la dimension de E : $\boxed{p \leqslant \dim E}$.

Partie III

1)
- $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$.
- $\omega \in C(f)$ car $\omega \circ f = f \circ \omega = \omega$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(g, h) \in (C(f))^2$, alors $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$,

$$f \circ (\lambda g + h) = \lambda f \circ g + f \circ h = \lambda g \circ f + h \circ f = (\lambda g + h) \circ f$$

donc $\lambda g + h \in C(f)$.

Donc $\boxed{C(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}$.

2) Soit $g \in C(f)$.

-a- f est nilpotente d'indice n donc d'après II-2)-b-, il existe $x_0 \in E$ tel que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.
De plus $\operatorname{Card}(\mathcal{B}) = n = \dim E$ donc d'après une caractérisation des bases $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$.

-b- On a

$$g(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x_0).$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $g \circ f = f \circ g$, par récurrence immédiate sur k, on montre que

$$g \circ f^k = f^k \circ g.$$

Donc

$$\begin{aligned} g\left(f^k(x_0)\right) &= f^k\left(g(x_0)\right) = f^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x_0)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{k+j}(x_0) \text{ par linéarité de } f^k. \\ &= a_0 f^k(x_0) + a_1 f^{k+1}(x_0) + \cdots + a_{n-k-1} f^{n-1}(x_0) \end{aligned}$$

-c- On pose $h = a_0 \operatorname{Id} + a_1 f + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} h\left(f^k(x_0)\right) &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j (f^k(x_0))\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{k+j}(x_0) \text{ par linéarité de } f^k. \end{aligned}$$

Et donc d'après, III-2)-b-,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad g\left(f^k(x_0)\right) = h\left(f^k(x_0)\right).$$

Donc g et h coincident sur $\mathcal{B}$ une base de E, par conséquent $h = g$ c'est-à-dire $\boxed{g = a_0 \operatorname{Id} + a_1 f + \ldots + a_{n-1} f^{n-1}}$.

3) D'après III-3), on a déjà $C(f) \subset \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$.
Puis pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f \circ f^k = f^{k+1} = f^k \circ f$ donc $f^k \in C(f)$.
Donc $\{\operatorname{Id}, f, \ldots, f^{n-1}\}$ est une partie de $C(f)$, donc $\operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \ldots, f^{n-1}) \subset C(f)$.
On a donc $\boxed{C(f) = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}, f, \ldots, f^{n-1})}$.

4) Reste à prouver que la famille $(\operatorname{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre.
Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$a_0 \operatorname{Id} \operatorname{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = \omega.$$

On évalue en x_0,

$$a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0_E.$$

Or d'après III-2)-a-, la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est libre et donc

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0.$$

Donc $(\operatorname{Id}, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre.
Avec III-3), il s'ensuit que c'est une base et par conséquent $\boxed{\dim C(f) = n}$ (son cardinal).