Problème 1. Règle de Bioche

L'objectif de ce problème est de présenter les règle de Bioche (sans démonstration) et de les utiliser pour le calcul d'intégrales.
On veut calculer des primitives de fractions rationnelles en $\sin x$, $\cos x$.

Partie I - Le changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$

Le changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$ fonctionne à tous les coups, et se ramène alors au calcul de primitives de fractions rationnelles.

1) -a- Soit $x \in]-\pi, \pi[$. On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. Montrer que :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

NB : formules à connaître !!

-b- Montrer que $\mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

2) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ à l'aide du changement de variable $t = \tan \dfrac{x}{2}$.

3) Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\sin x}$ sur $]-\pi, \pi[$. *Vous calculerez donc* $\displaystyle\int^s \frac{1}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$.
Facultatif, plus difficile : déterminer les primitives de cette même fonction sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Les règles de Bioche

On veut calculer $\displaystyle\int^s R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ où R est une fonction rationnelle de deux variables.
On note

$$\omega(x) = R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$$

appelé élément différentiel de la primitive. **Attention : il y a bien le $\mathrm{d}x$ dans l'élément différentiel**.

- Si pour tout x dans le domaine considéré $\omega(-x) = \omega(x)$, alors le changement de variable $t = \cos x$ fonctionne. *Moyen mnémotechnique :* $\cos(-x) = \cos x$.
- Si pour tout x dans le domaine considéré $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, alors le changement de variable $t = \sin x$ fonctionne. *Moyen mnémotechnique :* $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- Si pour tout x dans le domaine considéré $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, alors le changement de variable $t = \tan x$ fonctionne. *Moyen mnémotechnique :* $\tan(\pi + x) = \tan x$.
- **Si aucun des cas ci-dessus ne fonctionne**, alors on pose $t = \tan \frac{x}{2}$. *Ce changement de variable donne plus de calcul s'il est utilisé dans l'un des trois cas ci-dessus.*

NB : règles à connaître !!

1) Après avoir justifié l'existence, déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

2) Après avoir justifié l'existence, déterminer les primitives de $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x \cos^2 x}$.

3) Après avoir justifié l'existence, déterminer les primitives de $h : x \mapsto \dfrac{\cos x}{(1+\sin x \cos x)(\sin x - \cos x)}\,\mathrm{d}x$.

Partie III - Une suite d'intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{5 - 4\cos x}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que la suite (I_n) est bien définie.

2) On veut calculer I_0.

   -a- Vérifier qu'aucune des règle de Bioche ne s'applique.

   -b- On souhaite donc poser le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ qui pose problème en la variable π.
   On pose pour $a \in [0, \pi[$,
   $$I_0(a) = \int_0^a \frac{1}{5 - 4\cos x}\,\mathrm{d}x.$$
   Justifier soigneusement que $\lim\limits_{a \to \pi} I_0(a) = I_0$

   -c- Calculer $I_0(a)$ à l'aide du changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$.

   -d- En déduire I_0.

3) Calculer I_1 en utilisant la valeur de I_0.

4) Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1}, I_n et I_{n+1}. En déduire I_n.