Exercice 1. Intégrale de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) -a- On effectue le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ dans I_n, alors $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$ et $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$.

Donc: $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\frac{\pi}{2} - x) - \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \,\mathrm{d}x$ $\boxed{I_n = J_n}$.

-b- $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}$ donc $\boxed{I_1 = 1}$.

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ donc $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{4}}$.

-c- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$ car $\sin t \in [0, 1]$ et donc en intégrant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par croissance de l'intégrale, il vient $I_{n+1} \leqslant I_n$. Donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$. De plus, $x \mapsto \sin^n x$ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc par positivité de l'intégrale (I_n) est minorée par 0. Finalement, d'après le théorème de la limite monotone $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } l \in \mathbb{R}^2}$.

-d- Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} t \times \sin t \,\mathrm{d}t.$$

On pose $\begin{cases} u(t) = -\cos t & u'(t) = \sin t \\ v(t) = \sin^{n+1} t & v'(t) = (n+1)\sin^n t \cos t \end{cases}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \underbrace{\left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t \,\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t(1 - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n t - \sin^{n+2} t)\,\mathrm{d}t = (n+1)(I_n - I_{n+2}). \qquad \text{Donc } \boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n} \ (*) \end{aligned}$$

-e- Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\frac{n+1}{n+2}I_n \qquad (\text{d'après } (*)) \\ &= (n+1)I_n I_{n+1} = u_n. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est constante de valeur constante } u_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}}$.

-f- On passe à la limite l'égalité $I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ il vient $l^2 = 0$ c'est-à-dire $l = 0$, d'où $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } 0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ car (I_n) est décroissante.

Notons que $I_n > 0$, en effet $I_n \geqslant 0$ d'après 2), et $I_n \neq 0$ car sinon $u_n = 0$ ce qui est absurde. On peut donc diviser par $I_n > 0$,

$$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

Or d'après 4), $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} = \dfrac{n+1}{n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc par théorème d'encadrement, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ c'est-à-dire $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$, on en déduit $I_{n+1}I_n \underset{+\infty}{\sim} I_n^2$. Donc d'après 5): $I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ donc comme $I_n > 0$, $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$.

-g- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$\mathcal{P}_n : \text{“}I_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2n+1}\text{”}.$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, $\dfrac{(0)!}{(0!)^2 2^0} \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\dfrac{(0!)^2 2^0}{(0)!} \dfrac{1}{1} = 1$ et $I_1 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, alors au rang $n+1$

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &\overset{(*)}{=} \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} \\ &\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \\ &= \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \\ &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2 2^{2n+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2n+3} &\overset{(*)}{=} \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n+1} \\ &\overset{\text{H.R.}}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{2n+2}{2n+3} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{((n+1)!)^2 2^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

- **Conclusion.** $\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ I_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\dfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1}=\dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\dfrac{1}{2n+1}}$.

Remarque. On peut $\boxed{\text{conjecturer}}$ la formule, en itérant la relation de récurrence 3): pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4}=\ldots=\frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0\\ &= \frac{(2n)!}{(2n(2n-2)\cdots 2)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}=\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}=\ldots=\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}I_1\\ &= \frac{(2n(2n-2)\cdots 2)^2}{(2n+1)!}1=\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

NB: en toute rigueur, ce calcul n'est pas la preuve de la formule mais simplement un moyen de la conjecturer. Un raisonnement par récurrence est attendue.

2) La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$ (deux fosi dérivable et dérivée seconde exp $\geqslant 0$) donc sa courbe est au dessus de ses tangente, en particulier la tangente au point d'abscisse 0 : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\geqslant x+1}$.

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in[0,n]$. Avec $x=-\frac{u}{n}$ dans 1), on obtient: $\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}\geqslant -\frac{u}{n}+1\geqslant 0$.
On compose par $x\mapsto x^n$ croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$e^{-u}\geqslant\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{-u}-\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\geqslant 0}.$$

4) -a- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $t\in[0,1]$, d'après 1): $\mathrm{e}^t\geqslant 1+t$. On multiplie par $1-t\geqslant 0$ puis on compose par $x\mapsto x^n$ croissante sur $\mathbb{R}_+$, pour obtenir

$$\boxed{(1-t)^n\,\mathrm{e}^{nt}\geqslant(1-t^2)^n}.$$

-b- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $\psi : t\mapsto(1-t^2)^n-(1-nt^2)$. ψ est dérivable sur $[0,1]$ comme fonction polynomiale, avec

$$\forall t\in[0,1],\ \ \psi'(t)=-2nt(1-t^2)^{n-1}+2nt=2nt(1-(1-t^2)^{n-1})\geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad \psi \text{ est croissante sur } [0,1].$$

De plus $\psi(0)=0$. Finalement ψ est positive sur $[0,1]$, ce qui donne: $\boxed{\forall t\in[0,1],\ (1-t^2)^n\geqslant 1-nt^2}$.

-c- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in[0,n]$. Avec $t=\frac{u}{n}\in[0,1]$, dans 3)-a-, 3)-b- on obtient

$$\left(1-\frac{u}{n}\right)^n\mathrm{e}^u\geqslant 1-n\left(\frac{u}{n}\right)^2 \qquad \text{c'est-à-dire en multipliant par } \mathrm{e}^{-u}\geqslant 0 \qquad \left(1-\frac{u}{n}\right)^n\geqslant \mathrm{e}^{-u}-\frac{u^2}{n}\,\mathrm{e}^{-u}.$$

Finalement: $\boxed{\mathrm{e}^{-u}-\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n\leqslant\dfrac{u^2}{n}\,\mathrm{e}^{-u}}$.

5) Soit $n\in\mathbb{N}$.

-a- On effectue le changement de variable $t=\sqrt{n}u$ alors $u^2=\frac{t^2}{n}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t$, alors $\mathrm{d}t=\sqrt{n}\,\mathrm{d}u$ et

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{d}t=\sqrt{n}\int_0^1(1-u^2)^n\,\mathrm{d}u}.$$

-b- On effectue le changement de variable $u=\sin x$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1(1-u^2)^n\,\mathrm{d}u$, alors $\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x$ et

$$\int_0^1(1-u^2)^n\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right)^n\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\int_0^1(1-u^2)^n\,\mathrm{d}u=I_{2n+1}}.$$

-c- De 4)-a-, 4)-b- et l'équivalent de I_n rappelé en préambule, il vient

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{d}t=\sqrt{n}I_{2n+1}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}.$$

6) -a- Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$f(-x)=\int_0^{-x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=-\int_0^{x}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=-f(x) \qquad \text{(après changement de variable } u=-t \text{ et donc } \mathrm{d}u=-\,\mathrm{d}t).$$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$.

-b- La fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue donc f est dérivable avec:

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\geqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}}.$$

-c- Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant 1$, d'après la relation de Chasles:

$$f(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Pour $t \in [1, x]$, en particulier $t \geqslant 1$, on a

$$-t^2 \leqslant -t \quad \text{donc} \quad \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t} \quad \text{d'où} \quad \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

On a donc bien: $f(x) \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t.$

Comme f est croissante, cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $\boxed{f \text{ est majorée par } \dfrac{1}{\mathrm{e}} + \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t}$.

-d- La fonction f est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone sur les fonctions, $\boxed{f \text{ possède une limite finie en } +\infty}$, notons la l.

7) -a- Soit $h : t \mapsto t^4\,\mathrm{e}^{-t^2}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ car produit de de $t \mapsto t^4$ et de la composée de $t \mapsto -t^2$ dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de exp dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad h'(t) = \mathrm{e}^{-t^2}(4t^3 - 2t^5) = 2t^3\,\mathrm{e}^{-t^2}(2 - t^2).$$

	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
h'		$+$		$-$	
h	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	0

D'où le tableau de variations. On déduit: $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) \leqslant 4\,\mathrm{e}^{-2}}$

-b- Soit $t \in [0, \sqrt{n}]$. On pose $u = t^2 \in [0, n]$ et on applique les inégalités de 2) et 3)-c-, on obtient

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^4}{n}\,\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n} \qquad \text{(la dernière inégalité découlant de 6)-a-).}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(\mathrm{e}^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n} = \underbrace{\frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{n}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Par théorème d'encadrement, il vient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(\mathrm{e}^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t = 0}.$$

-c- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(\mathrm{e}^{-t^2} - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right) \mathrm{d}t}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ d'après 6)-b-}} = \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t}_{=f(\sqrt{n})} - \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ d'après 4)-c-}}$$

Or $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = l$ alors $f(\sqrt{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Le passage à la limite de l'égalité ci-dessus donne alors $0 = l - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

Puis comme la fonction f est impaire, on a $\boxed{\lim\limits_{-\infty} f = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$.