Exercice 1

Partie I - Premier exemple: $E = \mathbb{R}^3$

Dans cette partie $E = \mathbb{R}^3$. On pose l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -x-y+z, z) \end{array}$.

1) Soient $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z', -\lambda x - x' - \lambda y - y' + \lambda z + z', \lambda z + z') \\ &= \lambda(x+y+z, -x-y+z, z) + (x'+y'+z', -x'-y'+z', z') \end{aligned}$$

$\boxed{f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)}$.

De plus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

2) Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Calcul de $\operatorname{Im} f^2$ et $\operatorname{rg}(f^2)$. On calcule:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,-1,0) & f^2(e_1) &= f(1,-1,0) = (0,0,0) \\ f(e_2) &= (1,-1,0) & f^2(e_2) &= f(1,-1,0) = (0,0,0) \\ f(e_3) &= (1,1,1) & f^2(e_3) &= f(1,1,1) = (3,-1,1) \end{aligned}$$

Or $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}(f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3))$ donc $\boxed{\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1) \text{ où } \varepsilon_1 = (3,-1,1)}$. Puis comme $\varepsilon_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ alors (ε_1) est libre, comme elle engendre $\operatorname{Im} f$ alors $\boxed{(\varepsilon_1) \text{ est une base } \operatorname{Im} f^2}$. Donc $\boxed{\operatorname{rg}(f^2) = 1}$.

- Calcul de $\operatorname{Ker} f^2$. D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f^2 = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rg} f^2 = 2$. Or d'après les calculs de $\operatorname{Im} f^2$, $e_1 \in \operatorname{Ker} f^2$ et $e_2 \in \operatorname{Ker} f^2$, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc (e_1, e_2) libre, de plus contient $2 = \dim \operatorname{Ker} f$ donc d'après le théorème de caractérisation des bases, $\boxed{(e_1, e_2) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f^2}$.

- Montrons que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f^2$ sont supplémentaires dans E.
$\dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2 = 2 + 1 = 3 = \dim E$.
Puis:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f^2 + \operatorname{Im} f^2 &= \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \varepsilon_1) = \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(3,-1,1)) \quad C_3 - 3C_1 + C_2 \\ &= \operatorname{Vect}((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

D'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie $\boxed{\operatorname{Ker} f^2 \text{ et } \operatorname{Im} f^2 \text{ sont supplémentaires dans } E}$. **NB:** on peut aussi montrer que la famille $(e_1, e_2, \varepsilon_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ en calculant son rang.

3) On détermine explicitement $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ *(avec la définition, c'est plus rapide que de déterminer* $\operatorname{Im}(f - \operatorname{Id}_E)$ *puis le rang...)*
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = x \\ -x-y+z = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = z - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 3z \end{cases}.$$

Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Vect}((3,-1,1)) = \operatorname{Im} f^2}$. Et donc d'après 3), $\boxed{\operatorname{Ker} f^2 \text{ et } \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

Partie II - Deuxième exemple: $E = \mathbb{R}_2[X]$

Dans cette partie $E = \mathbb{R}_2[X]$. On pose l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' + P'(0)X \end{array}$

1) Soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' + (\widetilde{\lambda P + Q})'(0)X = \lambda(P' + \widetilde{P'}(0)X) + (Q' + \widetilde{Q'(0)}X) = \lambda f(P) + f(Q).$$

De plus si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_1[X]$ et $P'(0)X \in \mathbb{R}_1[X]$ donc par somme $f(P) \in \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}_2[X]$. Finalement, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$.

2) - $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}(f^2(1), f^2(X), f^2(X^2))$. Or,

$$\begin{aligned} f(1) &= 0_{\mathbb{R}[X]} & f^2(1) &= f(0_{\mathbb{R}[X]}) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ f(X) &= 1 + X & f^2(X) &= f(1+X) = 1 + X \\ f(X^2) &= 2X & f^2(X^2) &= f(2X) = 2 + 2X = 2f(X) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Vect}(1+X)}$.

Or $1+X \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc $(1+X)$ est libre, de plus engendre $\mathrm{Im}\, f^2$ donc $\boxed{(1+X) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\, f^2}$. D'où $\boxed{\mathrm{rg}\, f^2 = 1}$.

- D'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, f^2 = \dim \mathbb{R}_2[X] - \mathrm{rg}\, f^2 = 2$. Les calculs qui précèdent fournissent de plus $f^2(1) = 0$ et $f(X^2) = 2f(X)$ donc $f(X^2 - 2X) = 0$. D'où 1 et $X^2 - 2X$ appartiennent à $\mathrm{Ker}\, f^2$, ces deux polynômes n'étant pas proportionnels, la famille $(1, X^2 - 2X)$ est libre, de plus contient $2 = \dim \mathrm{Ker}\, f$ vecteurs, alors d'après le théorème de caractérisation des bases, $\boxed{(1, X^2 - 2X) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\, f^2}$

3) $\dim \mathrm{Ker}\, f^2 + \dim \mathrm{Im}\, f^2 = 3 = \dim_{\mathbb{R}_2}[X]$.
Puis:

$$\mathrm{Ker}\, f^2 + \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Vect}(1+X, 1, X^2 - 2X).$$

La famille $(1+X, 1, X^2 - 2X)$ est échelonnée en degré donc libre, de plus contient 3 polynômes. Or $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, donc $(1+X, 1, X^2-2X)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$ d'après le théorème de caractérisation des bases. D'où: $\mathrm{Ker}\, f^2 + \mathrm{Im}\, f^2 = \mathbb{R}_2[X]$.
NB: on pouvait aussi, transformer la famille génératrice en $(1, X, X^2)$ par des combinaisons linéaires.

Finalement, d'après la caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\boxed{\mathrm{Ker}\, f^2 \text{ et } \mathrm{Im}\, f^2 \text{ sont supplémentaires dans } E}$.

4) On détermine $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ à l'aide de la définition. Posons $P = aX^2 + bX + c$,

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow f(P) = P \\ &\Leftrightarrow 2aX + b + bX = aX^2 + bX + c \\ &\Leftrightarrow aX^2 - 2aX + c - b = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P = b(X+1) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(X+1) = \mathrm{Im}\, f^2}$.

Partie III - Cas général

On suppose maintenant que $f^3 = f^2$. On pose $F = \mathrm{Ker}\, f^2$ et $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

1) $\{0_E\} \subset F \cap G$ car F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
Inversement, soit $u \in F \cap G$ c'est-à-dire $f(u) = u$ et $f^2(u) = 0_E$. Donc comme $f(u) = u$ alors en appliquant f, $f^2(u) = f(u)$, puis de nouveau $f(u) = u$ d'où $f^2(u) = u$. Or $f^2(u) = 0_E$ d'où $u = 0_E$ d'où l'autre inclusion. Finalement, $\boxed{F \cap G = \{0_E\}}$.

2) $f^2 \in \mathcal{L}(E)$. Puis en utilisant $f^3 = f^2$

$$(f^2)^2 = f^4 = f^3 \circ f = f^2 \circ f = f^3 = f^2 \quad \text{donc } \boxed{f^2 \text{ est un projecteur}}.$$

3) Montrons $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.

$\subset$: Soit $v \in \mathrm{Im}\, f^2$, posons alors $u \in E$ tel que $v = f^2(u)$. Il vient

$$(f - \mathrm{Id}_E)(v) = f(v) - v = f^3(u) - f^2(u) = 0_E \quad (\text{car } f^2 = f^3) \quad \text{d'où } v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \quad \text{donc } \mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E).$$

$\supset$: Soit $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ c'est-à-dire $f(u) = u$. Donc $f^2(u) = f(f(u)) = f(u) = u$. D'où $u \in \mathrm{Im}\, f^2$. Ce qui donne l'autre inclusion.

Finalement $\boxed{\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)}$.

4) Comme f^2 est un projecteur, $\mathrm{Im}\, f^2$ et $\mathrm{Ker}\, f^2$ sont supplémentaires, or d'après C-3), $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $\boxed{F \oplus G = E}$.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathrm{Im}\, f^{k+1} \subset \mathrm{Im}\, f^k$. Soit $v \in \mathrm{Im}\, f^{k+1}$, posons $u \in E$ tel que $v = f^{k+1}(u)$, alors $v = f^k(f(u)) \in \mathrm{Im}\, f^k$.
Donc $\mathrm{Im}\, f^{k+1} \subset \mathrm{Im}\, f^k$ et donc $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{Im}\, f^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante au sens de l'inclusion}}$.

Montrons que $\mathrm{Ker}\, f^k \subset \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$. Soit $v \in \mathrm{Ker}\, f^k$, alors $f^{k+1}(v) = f(f^k(v)) = f(0_E) = 0_E$ donc $v =\in \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$.
Donc $\mathrm{Ker}\, f^k \subset \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$ et donc $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{Ker}\, f^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est une suite croissante au sens de l'inclusion}}$.

2) Posons k entier tel que $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$. Montrons que $\mathrm{Ker}\, f^{k+1} = \mathrm{Ker}\, f^{k+2}$.

$\subset$: $\mathrm{Ker}\, f^{k+1} \subset \mathrm{Ker}\, f^{k+2}$ d'après 1) et la croissante de la suite $(\mathrm{Ker}\, f^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

$\supset$: soit $u \in \mathrm{Ker}\, f^{k+2}$, alors $f^{k+2}(u) = 0_E$ donc $f^{k+1}(f(u)) = 0_E$ donc $f(u) \in \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$. Or $\mathrm{Ker}\, f^{k+1} = \mathrm{Ker}\, f^k$ donc $f^k(f(u)) = 0_E$ càd $f^{k+1}(u) = 0_E$ càd $u \in \mathrm{Ker}\, f^{k+1}$. D'où la 2ème inclusion.

On a donc bien, $\mathrm{Ker}\, f^{k+1} = \mathrm{Ker}\, f^{k+2}$. De proche en proche, tous les noyaux sont donc égaux à partir de $\mathrm{Ker}\, f^k$ c'est-à-dire :

$\boxed{\forall m \geqslant k,\ \operatorname{Ker} f^m = \operatorname{Ker} f^k}$.
NB : on pourrait montrer le résultat par récurrence sur m.

3) Posons k entier tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$. Montrons que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2}$.

   $\subset$: $\operatorname{Im} f^{k+2} \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ d'après 1) et la croissante de la suite $(\operatorname{Im} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
   $\supset$: soit $v \in \operatorname{Im} f^{k+1}$, alors posons $u \in E$ tel que $v = f^{k+1}(u) = f(f^k(u))$. Or $f^k(u) \operatorname{Im} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$, donc posons $a \in E$ tel que $f^k(u) = f^{k+1}(a)$. On déduit $v = f(f^{k+1}(a)) = f^{k+2}(a) \in \operatorname{Im} f^{k+2}$. D'où la deuxième inclusion.

   On a donc bien, $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2}$. De proche en proche, toutes les images sont égales à partir de $\operatorname{Im} f^k$ c'est-à-dire : $\boxed{\forall m \geqslant k,\ \operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^k}$.
   NB : on pourrait montrer le résultat par récurrence sur m.

4) $\boxed{\text{On suppose que } E \text{ est de dimension finie } n}$. Soit s (en supposant qu'il existe) le plus petit entier k tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
   Soit r (en supposant qu'il existe) le plus petit entier k tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$.
   On veut montrer que $r = s$.

   -a- D'après 1), la suite la suite $(\operatorname{Ker} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante donc la suite des dimensions $(\dim \operatorname{Ker} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est suite croissante d'entiers naturels, majorée par $\dim E$ car les noyaux sont inclus dans E, la suite ne peut donc être strictement croissante, donc il existe un entier naturel k tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$, on note s le plus petit entier vérifiant cette propriété.

   Montrons que $s \leqslant n$. Supposons que $s > n$, alors pour $k \leqslant s$, $\operatorname{Ker} f^k \not\subseteq \operatorname{Ker} f^{k+1}$ donc $\dim \operatorname{Ker} f^k < \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$ donc $\dim \operatorname{Ker} f^{k+1} - \dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant 1$, on somme alors pour $k = 0$ à $s-1$, par téléscopage on obtient $\dim \operatorname{Ker} f^s - 0 \geqslant s > n$ donc $\dim \operatorname{Ker} f^s > n$ ce qui est absurde car $\operatorname{Ker} f^s \subset E$. Don c$s \leqslant n$.

   D'après 1), la suite la suite $(\operatorname{Im} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante donc la suite des dimensions $(\dim \operatorname{Im} f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est suite décroissante d'entiers naturels, minorée par 0, la suite ne peut donc être strictement décroissante, donc il existe un entier naturel k tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$, on note r le plus petit entier vérifiant cette propriété.

   Par un raisonnement similaire à celui ci-dessus, on montre $r \leqslant n$.

   On a donc bien, $\boxed{r = s \leqslant n}$.

   -b- Supposons $s \leqslant r$. D'après 1), on a déjà une inclusion, $\operatorname{Im} f^r \subset \operatorname{Im} f^s$.
   Reste à prouver l'égalité des dimensions. D'après 2), $\operatorname{Ker} f^r = \operatorname{Ker} f^s$ (s est un indice pour lequel $\operatorname{Ker} f^s = \operatorname{Ker} f^{s+1}$) d'où l'égalité des dimensions $\dim \operatorname{Ker} f^r = \dim \operatorname{Ker} f^s$ et donc d'après le théorème du rang $\dim E - \dim \operatorname{Im} f^r = \dim E - \dim \operatorname{Im} f^s$ et donc $\dim \operatorname{Im} f^r = \dim \operatorname{Im} f^s$.
   On en déduit que $\operatorname{Im} f^s = \operatorname{Im} f^r$.
   Par minimalité de r et d'après 3), on a donc $s \geqslant r$.
   Avec $s \leqslant r$, on a donc bien $\boxed{r = s}$.

   -c- Par un raisonnement similaire, on montre que si $r \leqslant s$, alors $\operatorname{Ker} f^s = \operatorname{Ker} f^r$, puis $s = r$.

   -d- D'après 4)-a- et 4)-b- on a donc bien dans tous les cas $r = s$.

5) On suppose toujours que E est de dimension finie n.

   -a- On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k = \dim(\operatorname{Im} f^k) - \dim(\operatorname{Im} f^{k+1})$.
   Conséquence de la définition de δ_k du théorème du rang appliqué à f^k et f^{k+1} il vient, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ \delta_k = \dim(\operatorname{Ker} f^{k+1}) - \dim(\operatorname{Ker} f^k)}$.
   On souhaite prouver dans la suite que cette suite (δ_k) est décroissante

   -b- $\operatorname{Im} f^{k+1}$ un sev de $\operatorname{Im} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$ est de dimension finie, donc $\boxed{\text{il existe un sous-espace vectoriel } D_k \text{ tel que } \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1} \oplus D_k}$
   avec de plus $\dim D_k = \dim \operatorname{Im} f^k - \dim \operatorname{Im} f^{k+1}$ donc $\boxed{\dim D_k = \delta_k}$.

   -c- On a $\operatorname{Im} f^{k+1} = \{f^{k+1}(a) \ / \ a \in E\} = \{f(f^k(a)) \ / \ a \in E\} = f(\operatorname{Im} f^k) = f(\operatorname{Im} f^{k+1} \oplus D_k)$.

   Donc $\operatorname{Im} f^{k+1} = \{f(a+b) / a \in \operatorname{Im} f^{k+1} \text{ et } b \in D_k\} = \{f(f^{k+1}(c)+b) / c \in E \text{ et } b \in D_k\} = \{f^{k+2}(c)+f(b) / c \in E \text{ et } b \in D_k\}$.
   Donc $\boxed{\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2} + f(D_k)}$.

   -d- D'une part, à l'aide de la formule de Grassmann,
   $$\dim \operatorname{Im} f^{k+1} = \dim \operatorname{Im} f^{k+2} + \dim f(D_k) - \dim(\operatorname{Im} f^{k+2} \cap f(D_k)) \leqslant \dim \operatorname{Im} f^{k+2} + \dim f(D_k).$$
   Donc $\delta_{k+1} = \dim \operatorname{Im} f^{k+1} - \dim \operatorname{Im} f^{k+2} \leqslant \dim f(D_k)$.
   Puis $\dim f(D_k) \leqslant \dim D_k$ $(*)$ or $\dim D_k = \delta_k$ d'après 5)-c-.
   Finalement, $\boxed{\delta_{k+1} \leqslant \delta_k}$.

   NB : preuve de $(*)$, notons $(e_1, \dots, e_d)$ une base D_k,
   $$f(D_k) = f(\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_d)) = \operatorname{Vect}(f(e_1, \dots, f(e_d)).$$
   Donc $\dim f(D_k) \leqslant \dim \operatorname{Vect}(f(e_1, \dots, f(e_d)) \leqslant d$ (la dimension est inférieure au nb d'éléments de toute famille génératrice).