Chapitre
Séries

Objectif de ce chapitre : donner un sens à la notion intuitive de somme infinie :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\ldots. \qquad 1-1+1-1+1-1+\cdots\ldots.$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\ldots. \qquad 2+2+2+\cdots+2+\cdots\ldots..$$

I Séries : généralités

I.1 Définition

Définition (Série numérique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **la série (numérique) de terme général** u_n. On la note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, S_n est la **somme partielle d'indice** n de la série $\sum u_n$.

Remarques (Série de terme général définie à partir d'un certain rang)

On peut aussi définir des séries de terme général définies à partir d'un certain rang, on note dans ce cas

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n \qquad \sum_{n\geqslant 1} u_n \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n.$$

Exemples $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2$ sont des séries.

Définition (Convergence d'une série)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- La série $\sum u_n$ est dite **convergente** si la suite des sommes partielles (S_n) l'est. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) est appelée **la somme de la série** $\sum u_n$ et est notée

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- $\boxed{\text{Si la série } \sum u_n \text{ est convergente}}$ alors, on définit **le reste d'indice** n de la série $\sum u_n$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \qquad \text{et donc} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n.$$

  On notera qu'alors la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

- Si la série n'est pas convergente, elle est dite **divergente**. Dans ce la suite (S_n) admet pour limite $+\infty$, $-\infty$ ou n'admet pas de limite.

NB : cette définition s'adapte aisément au cas d'une série de terme général défini à partir d'un certain rang.

Remarques (Attention !!!)

Une série est un nouvel objet mathématique qu'il convient de manipuler correctement. En particulier les notations et le vocabulaire s'y rapportant.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ n'ont de sens que si la série converge. La notation $\sum u_n$ a toujours un sens que la série converge ou non.

2)
   - $\sum u_n$ est une **série**
   - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ est **la somme partielle d'indice** n de la série
   - $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est **la somme de la série** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

3) Ne pas confondre **la série** $\sum u_n$, avec $\boxed{\text{le réel}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui est la somme de la série en cas de convergence.

   On n'écrit donc pas : la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, ni la somme de la série est $\sum u_n = 5$.

4) On ne parle pas de la limite de la série, mais de la somme de la série.

Exemples Les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n$ convergent-elles?

Remarques (Nature d'une série)

- **Étude de la nature**. Étudier la nature d'une série consiste à étudier la convergence ou la divergence de la série.
- **Calcul de somme**. Souvent, on étudiera la nature de la série, sans forcément en calculer la somme, mais en utilisant des propriétés du terme général. Mais parfois, on sera capable de calculer la somme.
- **Séries de même nature**. Deux séries sont de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.
- **Influence des premiers termes**. La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. La somme, OUI.
  Autrement dit : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ ont même nature.
  Ex : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{2^n}$.
- **Changement d'indice**. Soit $p \in \mathbb{N}$. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{n+p}$ ont même nature. Mais pas même somme.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment étudier la nature d'une série?)

Pour étudier la nature de $\sum u_n$, on étudie la nature de la suite des sommes partielles (S_n) (c'est la définition).

I.2 Premières séries de référence

Théorème (Série de référence : série géométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}.$$

Exercice classique. Méthode à retenir.

Soit $x \in]-1,1[$. Les séries $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$, $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$ sont appelées séries géométriques dérivées.
Montrer que ces séries convergent de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

NB : remarquer qu'elles sont obtenues en dérivant. *Indication : on pose* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ *et on dérive.*

⚠ **Attention** ⚠ pas de résultat sur la dérivation de "somme infinie", il faut se ramener à des sommes finies.

Exercice.

1) Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} 3^{-n}$ et somme éventuelle.

2) Dans le cas de convergence de la série $\sum z^n$, déterminer le reste d'indice n, R_n.

Théorème (Série harmonique)

La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge.

Proposition (Une série alternée)

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge de somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Théorème (Série exponentielle)

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge de somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

I.3 Divergence grossière

Théorème (Condition nécessaire de convergence)

Soit $\sum u_n$ une série numérique.
Si la série $\sum u_n$ converge **alors** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de limite nulle, on dit que la série **diverge grossièrement**.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse.
Autrement dit, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors on n'a pas forcément $\sum u_n$ converge. Contre-exemple :

Exemple Exemple de série grossièrement divergente :

I.4 Série téléscopique

Théorème (Série téléscopique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

✎ Méthode pratique ✎ (Etude d'une série téléscopique)

- On étudie la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$:
  - si on n'étudie que la nature on se ramène au théorème précédent et on étudie la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  - si on souhaite de plus calculer la somme de la série, on se ramène aux sommes partielles et à une somme téléscopique.
- Inversement, si on souhaite étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut étudier la nature de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ (ce qui donne une nouvelle méthode pour étudier la nature d'une suite).

Exercice.

1) Étudier la nature et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

2) Étudier la nature et calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

I.5 Opérations sur les séries convergentes

Théorème (Opérations sur les séries CV)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Si $\sum u_n$ converge alors $\sum(\lambda u_n)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n + v_n)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

3) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

4) Si $\sum u_n$ diverge et $\lambda \neq 0$ alors $\sum(\lambda u_n)$ diverge.

Remarques (Attention !!)

- Pas de résultat sur la série $\sum u_n v_n$ lorsque l'on a des informations sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La série $\sum u_n + v_n$ peut converger sans que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne convergent. Contre-exemple :
- On s'interdit d'écrire $\lambda \times \sum u_n$ et $\sum u_n + \sum v_n$.

Exercice.

1) **Classique**. Soit $x \in]-1, 1[$. En vous ramenant aux séries géométriques dérivées, étudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 x^n$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^3 x^n$ et calculer leur somme.

2) Nature et somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(3 \times 2^{-n} + 2 \times 3^{-n})$.

3) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{4}{n+1}$.

I.6 Séries de nombres complexes

Théorème (Série de nombres complexes)

Une série de nombres complexes $\sum z_n$ est convergente si et seulement si les séries de nombres réels $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ sont convergentes. Dans ce cas:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Exercice. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos n}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin n}{2^n}$ sont convergentes et calculer leur somme.

II Séries à termes positifs (SATP)

Dans cette partie, toutes les séries sont à termes **réels positifs à partir d'un certain rang (apcr)** :

$$\exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant 0.$$

Les résultats de cette partie s'adaptent aisément aux séries à termes négatifs, en étudiant $\sum(-u_n)$.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment montrer qu'une série est SATP)

On étudie $\sum u_n$. Plusieurs méthodes pour prouver que $\sum u_n$ est SATP apcr:

- on peut faire l'étude du signe de u_n (s'y prête bien lorsque u_n s'écrit comme quotient, produits de facteurs dont on connait le signe).
- SINON, on peut déterminer un équivalent de u_n et étudier le signe de l'équivalent (u_n est alors prouvée positive apcr).

Exemples Montrer que les séries $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{n(n+1)^2}$, $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n!}$, $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)^2}{n^3-4n+1}$, $\displaystyle\sum \frac{\exp(\frac{2}{n})-\cos(\frac{1}{n})}{n^3}$ sont des SATP apcr.

II.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence des SATP

Théorème (Caractérisation de la convergence des SATP)

Soit $\sum u_n$ une SATP apcr dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.
La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.
Dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$. Sinon la suite diverge vers $+\infty$ et on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

II.2 Comparaison série-intégrale

Théorème (Comparaison série-intégrale)

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $f : [N, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N+1$:

$$\int_{N+1}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{N}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

✎ **En pratique** ✎ En pratique inutile d'apprendre par coeur cet encadrement, il faut savoir le retrouver pour l'adapter plus facilement au contexte.
Il faut en revanche retenir l'encadrement point de départ de la démonstration, illustré par le dessin ci-dessus :

$$\boxed{\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Théorème (Séries de référence : séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

NB : pas de résultat sur la valeur de la somme.

Application de la comparaison série intégrale: équivalent des sommes partielles et des restes
Exemple sur les sommes de Riemann (savoir-faire !)

- série harmonique $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
- série de Riemann pour $\alpha < 1$, $S_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ (cf. TD)
- série de Riemann pour $\alpha > 1$, $R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha - 1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$ (cf. TD).

Théorème (Nature série et intégrale)

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $f : [N, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors : la série $\sum f(n)$ et la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_N^n f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exercice. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)^2}, \sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

II.3 Comparaison des séries à termes positifs

L'étude de série se ramènera la plupart du temps à une comparaison à une série de référence :

Théorème (Comparaison avec inégalités)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP apcr telles que : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ à partir d'une d'un certain rang N.

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge avec : $\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice. Déterminer la nature des séries de terme général

1) $u_n = \dfrac{2^n}{3^n+1}$ 2) $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$ 3) $u_n = \dfrac{\cos^2(n)}{5n^3}$

Théorème (Comparaison avec équivalents)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP apcr telles que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice.

1) Prouver la convergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ à l'aide de $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

2) Étudier la nature de $\displaystyle\sum \frac{n+5}{n^2+12}, \sum \frac{2n+3}{n^3-5n+1}, \sum \frac{2^n+5^{2n}}{(\ln n)^2+7^{2n}+n^3}$.

3) Étudier la nature de $\displaystyle\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \sum \left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$.

Théorème (Comparaison avec O et o)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP apcr.
Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ (ou $u_n = o(v_n)$) alors $\sum u_n$ converge.

⚠ **Attention** ⚠ Si $\sum v_n$ diverge on ne peut conclure sur la nature de $\sum u_n$.

✎ Méthode pratique ✎ (Comment prouver que $u_n = O(v_n)$)

Plusieurs méthodes selon le contexte :

- on montre, par majoration, qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leqslant M$
- on étudie la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$, si elle est finie alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée
- on montre que $u_n = o(v_n)$, reconnaissant une négligeabilité usuelle (croissances comparées), et alors $u_n = O(v_n)$
- obtenu par développement limité (cf. remarque ci-dessous)

Exercice. Déterminer la nature des séries de terme général

1) $u_n = n\,\mathrm{e}^{-2n}$ 2) $u_n = \dfrac{1}{n^3(\ln n)^2}$

Remarques (Avantage du O sur o)

Dans le calcul d'un développement limité pour avoir une précision en $\mathrm{O}(x^{k+1})$, une partie régulière de degré k suffit.
Par exemple :

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{O}(x^3) \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{O}(x^5).$$

Conséquence pour avoir une précision en $\mathrm{O}(\frac{1}{n^{k+1}})$, la partie régulière s'arrête à $\dfrac{1}{n^k}$.

Exercice. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = 2\sin\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$.

✎ Méthode pratique ✎ (Règle $n^\alpha u_n$)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une SATP apcr. L'objectif est la comparaison avec les séries de Riemann.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\sum u_n$ converge (car dans ce cas $u_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^\alpha})$)
- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^*$ alors $\sum u_n$ converge (car dans ce cas $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{l}{n^\alpha}$))
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^*$ alors $\sum u_n$ diverge (car dans ce cas $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{l}{n^\alpha}$)
- S'il existe $\alpha \leqslant 1$ tel que $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge (car dans ce cas $u_n \geqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ apcr.).

Exercice. Déterminer la nature des séries de terme général

1) $u_n = n(\ln n)^2\,\mathrm{e}^{-3n}$ 2) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{(\ln n)^2 n^3}$ 3) $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^3}$ 4) $u_n = \dfrac{a^n}{n^\beta}$

✎ Méthode pratique ✎ (Comment étudier la nature d'une SATP)

On souhaite étudier la série $\sum u_n$.

- Vérifier que l'on a bien affaire à une SATP (étude de signe ou équivalent).
- On calcule la limite de u_n (éventuellement avec un équivalent), si u_n ne tend pas vers 0 alors la divergence est grossière.
- On calcule un équivalent simple de u_n, $u_n \sim a_n$.
- On étudie ensuite la nature de $\sum a_n$.
  - si $\sum a_n$ est une série de référence, c'est terminé.
  - sinon on la compare à une série de référence en utilisant les outils de comparaison $\leqslant$, O, règle $n^\alpha u_n$. Un développement asymptotique peut s'avérer utile.

III Séries de termes à signe non constant

III.1 Séries absolument convergentes

Définition

Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème (Condition suffisante de convergence)

Soit $\sum u_n$ une série numérique.
Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente et dans ce cas

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad \text{(Inégalité triangulaire)}$$

Exemple

1) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ est absolument convergente ssi $|q| < 1$.

2) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

⚠ **Attention** ⚠ La réciproque est fausse. Contre-exemple :

Exercice. Justifier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n^2} \qquad v_n = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}}{n^2}.$$

☞ **Explication** ☜ L'intérêt de la convergence absolue est de ramener l'étude d'une série $\sum u_n$ à l'étude de la série à termes positifs $\sum |u_n|$. Tous les résultats de la partie précédentes s'appliquent. En particulier on déduit le corollaire

Corollaire (Comparaison à une SATP avec O)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si la série $\sum |v_n|$ converge et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente (donc convergente).

Exercice.

1) Montrer que la série de terme général $u_n = (-1)^n \sin\left(\dfrac{n}{n^3+1}\right)$ converge.

2) Montrer que la série de terme général $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2 - \sin n}$ converge.

3) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$.

III.2 Séries alternées

Les séries convergeant mais ne convergeant pas absolument sont appelées séries semi-convergentes.
Leur étude est délicate, deux outils principaux étant souvent utilisés : le critère spécial des séries alternées (cf. ci-dessous) et la transformation d'Abel (hors programme en MPSI mais qui fait parfois l'objet d'exercice).

Définition (Séries alternées)

On appelle **série alternée** toute série de la forme $\sum(-1)^n a_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de signe constant.

Exemples. Les séries $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum(-1)^n \ln(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}})$ sont des séries alternées.

Théorème (Critère spécial des séries alternées)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **réelle décroissante et de limite nulle**.

- Alors, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ converge.
- De plus, en notant R_n le reste d'ordre n de la série et S_n la somme partielle d'ordre n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  1) $S_{2n+1} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \leqslant S_{2n}$ par conséquent : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n \geqslant 0$
  2) $R_n \leqslant 0$ si n est pair
  3) $R_n \geqslant 0$ si n est impair
  4) $|R_n| \leqslant a_{n+1}$.

Exercices.

1) Etudier la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de Riemann alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Remarques

⚠ **Attention** ⚠ Il n'est pas toujours aisé d'appliquer le CSSA directement à une série alternée car l'hypothèse de décroissance peut être difficile à vérifier. Dans ce cas on décompose la suite a_n en somme de termes (souvent grâce à un développement limité) que l'on traite séparément (l'un d'entre eux par le CSSA).

Exercice.

1) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier en fonction de α, la nature de la série $\sum (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$.