Chapitre
Groupe symétrique

Conformément au programme le groupe symétrique est introduit exclusivement en vue de l'étude des déterminants.

I Permutations

Définition (Permutation)

Soit un ensemble E. On appelle **permutation** de E une bijection de E dans E. Leur ensemble est noté $\mathcal{B}(E)$.
$(\mathcal{B}(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe des permutations** de E.

Définition (Groupe symétrique)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **groupe symétrique** d'ordre n, noté S_n, le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.
Une permutation $\sigma \in S_n$ se note

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Remarques

1) La permutation $\sigma : \begin{cases} 1 \mapsto 3 \\ 2 \mapsto 1 \\ 3 \mapsto 2 \end{cases}$ est donc notée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) S_n est un groupe fini qui contient $n!$ éléments.

3) Le groupe S_n n'est pas commutatif.

4) La composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ de deux éléments de S_n se dit encore produit et est parfois notée $\sigma_1 \sigma_2$.

Exercice.

1) Déterminer les permutations de $[\![1, 2]\!]$, de $[\![1, 3]\!]$.

2) Déterminer la réciproque de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3) Déterminer les composées $\sigma \circ \sigma'$ où $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition (Support d'une permutation)

On appelle **support** d'une permutation $\sigma \in S_n$ l'ensemble des éléments de $[\![1, n]\!]$ non invariants par σ.

Exemple Le support de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est :

Théorème-Définition (Ordre d'une permutation)

Soit $\sigma \in S_n$. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^q = \mathrm{Id}$.
On appelle **ordre** de σ le plus petit vérifiant cette propriété.

Exercice. Donner l'ordre de la permutation $\sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

II Cycles, transpositions

II.1 Cycles

Définition (p-cycle)

Soient p un entier $p \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_p$, p éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$.
Le **p-cycle** noté $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)$ est la permutation σ définie par

$$\begin{cases} \sigma(a_i) = a_{i+1} & \text{si } i \in [\![1, p-1]\!] \\ \sigma(a_p) = a_1 & \\ \sigma(x) = x & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarques (Sur les p-cycles)

- Le support du p-cycle $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)$ est $\{a_1, \ldots, a_p\}$.
- L'ordre du p-cycle $(a_1\ a_2 \ldots a_p)$ est p.
- Deux cycles de supports disjoints commutent.

Exemple

1) Ecrire le cycle $\sigma = (2534)$ comme une permutation de $[\![1, 6]\!]$. Que dire du cycle (5342)? Montrer que σ^{-1} est un cycle que l'on déterminera.

2) Calculer les produits $(1435)(235)$ et $(235)(1435)$. La produit de cycles est-il commutatif? Le produit de deux cycles donne-t-il un cycle?

3) Ecrire la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ comme produit de deux cycles à supports disjoints.
   En déduire σ^{100}.

Théorème (Décomposition d'une permutation en produit de cycles)

Toute permutation $\sigma \in S_n$ se décompose de manière unique en produit fini de cycles de supports disjoints.
Les cycles de cette décomposition commutent deux à deux.

Exercice. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 9 & 7 & 6 & 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer σ_2^{1000}.

II.2 Transpositions

Définition (Transposition)

Une **transposition** de S_n est un 2-cycle c'est-à-dire s'écrit $(a\,b)$ où $(a,b) \in (\llbracket 1,n \rrbracket)^2$. On la note $\tau_{a,b}$.

Remarques (Sur les transpositions)

1) Une transposition est involutive : $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}$.
2) La composée de deux transpositions de supports disjoints commutent.

Exercice. Dans S_8 calculer $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3}, \quad \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}, \quad \tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \circ \tau_{1,4} \circ \cdots \tau_{1,8}$.

Théorème (Décomposition en produit de transposition)

1) Tout cycle se décompose en produit de transpositions. Si $\sigma = (a_1 a_2 \ldots a_p) \in S_n$ alors, par exemple :

$$\sigma =$$

NB : la décomposition n'est pas unique.

2) $\boxed{\text{Toute permutation se décompose en produit de transpositions.}}$

NB : la décomposition n'est pas unique et le nombre de transpositions non plus.

Exercice.

1) Décomposer les permutations suivantes en produit de transpositions

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) -a- Pour $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$, calculer $\tau_{1,i} \circ \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i}$.
-b- En déduire que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions du type $\tau_{1,i}$.

III Signature d'une permutation

Théorème (Signature)

Il existe un unique morphisme de groupes $\varepsilon : S_n \to \{-1,1\}$ tel que :

$$\text{pour toute transposition } \tau, \quad \varepsilon(\tau) = -1.$$

Cette application s'appelle **signature**.

Propriétés (de la signature)

1) $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$.
2) Pour tout $(\sigma,\sigma') \in (S_n)^2, \qquad \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \qquad \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.
3) Si une permutation $\sigma \in S_n$ se décompose en produit de p transpositions alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.
Conséquence : la longueur de de la décomposition en produit de transpositions n'est pas unique mais toutes les longueurs sont de même parité.

Définition (Parité d'une permutation)

Une permutation $\sigma \in S_n$ est dite **paire** si $\varepsilon(\sigma) = 1$ et **impaire** si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exercice.

1) Quelle est la signature d'un p-cycle?

2) Quelle est la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 4 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

3) Quelle est la signature d'une permutation s'écrivant comme le produit de p cycles $c_1, \ldots, c_p$ de longueurs respectives $l_1, \ldots, l_p$.

Remarques (Sur le noyau de la signature)

Le noyau de ce morphisme est noté $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in S_n \ / \ \varepsilon(\sigma) = 1\}$, est donc un sous-groupe de S_n appelé **groupe alterné d'ordre** n (c'est l'ensemble des permutations paires de S_n).

Remarques (Deux jolies formules hors-programme)

Soit $\sigma \in S_n$.

- On note $I(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ c'est-à-dire le nombre de couples (i, j) tels que $\begin{cases} i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j) \end{cases}$, alors
$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}.$$
- $\varepsilon(\sigma) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.