Chapitre
Déterminants

I Formes n-linéaires alternées

Définition (Applications n-linéaires)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'application $f : E^n \to F$ est une application **n-linéaire** si f est linéaire par rapport à chacune de ces variables c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n) \in \mathbb{E}^{n-1},\ \forall (x,y) \in \mathbb{E}^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,$$
$$f(a_1,\dots a_{i-1},\boxed{\lambda x+\mu y},a_{i+1},\dots,a_n) = \boxed{\lambda} f(a_1,\dots a_{i-1},\boxed{x},a_{i+1},\dots,a_n) + \boxed{\mu} f(a_1,\dots a_{i-1},\boxed{y},a_{i+1},\dots,a_n).$$

- Si $F = \mathbb{K}$, l'application f est appelée **forme n-linéaire**. On note $\mathcal{L}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires sur E.

Exemples

1) L'application $\begin{array}{rccc} D: & (\mathbb{R}^2)^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((a,b),(c,d)) & \mapsto & \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \end{array}$ est 2-linéaire (on dit bilinéaire).

2) L'application $\begin{array}{rccc} \varphi: & (\overrightarrow{\mathcal{P}})^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \mapsto & \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \end{array}$ est bilinéaire.

3) L'application $\begin{array}{rccc} \varphi: & (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}))^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 fg \end{array}$ est bilinéaire.

⚠ **Attention** ⚠ Ne pas confondre n-linéaire sur E et linéaire sur E^n. Par exemple :

- si f est linéaire sur E^2 on a : $f(\lambda u, \lambda v) =$
- si g est bilinéaire sur E on a : $g(\lambda u, \lambda v) =$

Définition (Symétrique, antisymétrique, alternée)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $f \in \mathcal{L}^n(E)$ et $(a_1,\dots,a_n) \in E^n$.

- f est **symétrique** si $f(a_1,\dots,a_n)$ est inchangé lorsqu'on échange la place de deux vecteurs a_i et a_j.

  Conséquence : $\forall \sigma \in S_n,\quad f(a_1,\dots,a_n) = f(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)})$.

- f est **antisymétrique** si $f(a_1,\dots,a_n)$ est transformé en son opposé lorsqu'on échange la place deux vecteurs a_i et a_j.

  Conséquence : $\forall \sigma \in S_n,\quad f(a_1,\dots,a_n) = \varepsilon(\sigma) f(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)})$.

- f est **alternée** lorsque $f(a_1,\dots,a_n) = 0$ lorsque deux des vecteurs a_i sont égaux.

Exemples

1) L'application bilinéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} (\overrightarrow{\mathcal{P}})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \mapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$ est

2) L'application bilinéaire $D : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((a,b),(c,d)) & \mapsto & \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \end{array}$ est

Propriétés (Antisymétrie $\Leftrightarrow$ alternée)

Soit $f \in \mathcal{L}^n(E)$ une forme n-linéaire :

$$f \text{ alternée} \Longleftrightarrow f \text{ antisymétrique.}$$

Propriétés (Image d'une famille liée)

Soit $f \in \mathcal{L}^n(E)$ une forme n-linéaire alternée. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E alors

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ liée } \Longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Exercice. Soit f une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de base (e_1, e_2). On suppose $f(e_1, e_2) = 1$. Déterminer $f(x, y)$ pour $(x, y) \in E^2$ à l'aide des coordonnées de x et y dans la base (e_1, e_2).
Que devient cette expression lorsque f est alternée?

II Déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette section E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On note $\mathcal{A}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Théorème (Détermination des formes n-linéaires alternées)

- Toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont proportionnelles autrement dit $\mathcal{A}^n(E)$ est une droite vectorielle.
- Plus précisément : soient $f \in \mathcal{A}^n(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$,

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right) \times f(e_1, \ldots, e_n)$$

où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

NB : f ne dépend donc que de l'image d'une base de E.

Définition (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Le **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$, est l'unique forme n-linéaire alternée f sur E vérifiant $f(\mathcal{B}) = 1$.
Cette application est notée $\det_{\mathcal{B}}$, son expression est

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \quad \text{noté} \quad \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.
NB : on a donc $\mathcal{A}^n(E) = \mathrm{Vect}(\det_{\mathcal{B}})$, c'est-à-dire

$$f = \det_{\mathcal{B}} \times f(\mathcal{B}) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \quad f(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n) f(\mathcal{B}).$$

Exemples Déterminer l'expression dans les cas $n = 2$ et $n = 3$.

Remarques (Interprétation comme aire/volume)

1) On muni $\mathbb{R}^2$, d'une base orthonormée directe. Le déterminant de deux vecteurs relativement à cette base correspond à la valeur algébrique de l'aire du parallélogramme construit à partir de ces deux vecteurs.

2) On muni $\mathbb{R}^3$, d'une base orthonormée directe. Le déterminant de trois vecteurs relativement à cette base correspond à la valeur algébrique du volume du parallélépipède construit à partir de ces trois vecteurs.

Propriétés (du déterminant d'une famille de vecteurs)

1) L'échange de deux vecteurs change le signe du déterminant.

2) Si deux vecteurs sont identiques, le déterminant est nul.

3) Le déterminant d'une famille liée est nul.

4) On ne modifie pas la valeur du déterminant lorsque l'on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autre vecteurs.

5) Multiplier un seul vecteur par λ multiplie le déterminant par λ.

6) Multiplier tous les vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ^n.

Théorème (Formule de changement de changement de base)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \qquad\qquad\qquad \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$

Et une nouvelle caractérisation des bases :

Théorème (Caractérisation des bases à l'aide du déterminant)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de $\boxed{n \text{ vecteurs}}$ de E. Alors

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \;\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

Définition (Orientation des bases)

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension n.
On dit que :

- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$
- $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont une orientation opposée si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$:

- $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ où $u_1 = (2, 1)$ et $u_2 = (-2, 3)$
- $\mathcal{B}'' = (v_1, v_2)$ où $v_1 = (2, 1)$ et $v_2 = (-1, -4)$.

III Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette section E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Théorème-Définition (Déterminant d'un endomorphisme)

Soient φ un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Le nombre
$$\det_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$$
est indépendant de la base choisie, ce nombre est noté $\det(\varphi)$ et est appelé **le déterminant de** φ.

✎ **En pratique** ✎ Comme $\det(\varphi)$ est indépendant de la base choisie, on choisit pour le calcul une base qui nous convient le mieux.

Exercice. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $u = (1, 2)$ et $v = (3, -1)$ et s la symétrie par rapport $\mathrm{Vect}(u)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(v)$.
Déterminant le déterminant de s.

Propriétés (du déterminant d'un endomorphisme)

Soient φ et ψ deux endomorphismes de E.

1) $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.
2) $\det(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0$.
3) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda\varphi) = \lambda^n \det(\varphi)$.
4) $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi)$.

Et une nouvelle caractérisation des automorphismes de E.

Théorème (Caractérisation des automorphismes à l'aide du déterminant)

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
$$\varphi \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(\varphi) \neq 0.$$
Dans ce cas :
$$\det(\varphi^{-1}) = \frac{1}{\det(\varphi)}.$$

Remarques

- ⚠ **Attention** ⚠ Le déterminant n'est pas linéaire. En général $\det(\varphi + \psi) \neq \det(\varphi) + \det(\psi)$.
- **Groupe spécial linéaire**. L'ensemble des automorphismes de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé groupe spécial linéaire et noté $\mathrm{SL}(E)$.
- **Morphisme induit**. L'application $\begin{array}{rccc} \det : & (\mathrm{GL}(E), \circ) & \to & (\mathbb{R}^*, \times) \\ & \varphi & \mapsto & \det(\varphi) \end{array}$ est un morphisme de groupes.

IV Déterminant d'une matrice carrée

Définition (Déterminant d'une matrice carrée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le **déterminant de** A, noté $\det A$, est le déterminant dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ de la famille des colonnes de A.
En notant a_{ij} les coefficients de A alors
$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarques (Les trois notions de déterminants coincident)

$$\det(A) = \det(f) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ où } A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$

Théorème (Propriétés du déterminant d'une matrice)

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

1) **Caractérisation de l'inversibilité**. A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.
   Dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

2) **Déterminant d'un produit**. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

3) **Morphisme**. L'application $\det : \begin{array}{ccc} (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times) & \to & (\mathbb{R}^*, \times) \\ A & \mapsto & \det(A) \end{array}$ est un morphisme de groupes.

Exercice.

1) Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.

2) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A = 0$. Montrer que A n'est pas inversible.

Théorème (Déterminant de la transposée)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^\top) = \det(A)$.

Théorème (Opérations sur les colonnes/lignes)

1) On ne modifie pas la valeur du déterminant si on ajoute à une colonne/ligne une combinaison linéaire des autres colonnes/lignes.

2) Le déterminant est multiplié par λ si une colonne/ligne est multiplié par λ.

3) Le déterminant change de signe si on échange deux colonnes/lignes.

4) Le déterminant est inchangé si on fait subir aux colonnes/lignes une permutation paire.

5) Le déterminant change de signe si on fait subir aux colonnes/lignes une permutation impaire.

6) $\det(\lambda A) =$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in$

Exercice. On pose $D(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & X \end{vmatrix}_{[n]}$.

1) Montrer que D est un polynôme de degré n.

2) Montrer que 1 et $1 - n$ sont racines de D.

V Méthode de calcul des déterminants

V.1 Matrice de format (2,2) et (3,3)

Théorème (Déterminant d'ordre 2 et 3)

1) **Ordre 2**. $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b.$

2) **Ordre 3** : règle de Sarrus. $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a'' - ac'b'' - ba'c''.$

Exercice.

1) On pose $\mathcal{B} = (u, v, w)$ où $u = (-1, 2, 3)$, $v = (2, 0, 1)$, $w = (1, -3, 1)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x - y + z, x + 3y - 2z, x + z) \end{array}$. Montrer que f est bijective.

3) On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(0), P'(1)) \end{array}$. Montrer que g est bijective.

V.2 Matrice de forme particulière

Théorème (Déterminant d'une matrice triangulaire)

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux : $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$

Remarques

- Le déterminant d'une matrice diagonale est donc aussi le produit des éléments diagonaux.
- On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire est inversible ssi les coefficients diagonaux sont non nuls.

Théorème (Déterminant par blocs)

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B).$$

⚠ **Attention** ⚠ Le bloc nul 0 est indispensable dans cette formule (il pourrait aussi être "en haut à droite") :

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

. Ce résultat ne se généralise pas au cas d'un déterminant par blocs $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$.

Exercice. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{vmatrix}$.

V.3 Développement par rapport à une colonne ou ligne

Définition (Cofacteurs)

Soit Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- On note m_{ij} le déterminant de format $(n-1, n-1)$ obtenu en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de Δ. m_{ij} est appelé le **mineur relatif à** a_{ij}.
- On appelle **cofacteur** de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Théorème (Développement d'un déterminant par rapport à une ligne/colonne)

Soit Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1) Développement par rapport à la j-ième colonne : $\quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}.$

2) Développement par rapport à la i-ième ligne : $\quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}.$

✎ Méthode pratique ✎ (Stratégies de calcul de déterminant)

Voici quelques stratégies pour calculer efficacement un déterminant.

- Faire apparaître des 0 en utilisant des transvections afin de développer plus facilement.
- Faire apparaître des facteurs sur les lignes ou les colonnes et exploiter la n-linéarité.
- Développer selon une ligne ou une colonne qui contient un maximum de 0.

Exercice.

1) Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ et en donner une forme factorisée.

3) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ et en donner une forme factorisée.

4) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{[n]}$.

5) Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$.

Théorème (Calcul de l'inverse avec la comatrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On appelle **comatrice de** A, la matrice des cofacteurs : $\widetilde{A} = (\Delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
- On a alors : $A\widetilde{A}^\top = \det(A) I_n$.

  Conséquence, si A est inversible, alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \widetilde{A}^\top.$$

Exemple Que donne cette formule dans le cas d'une matrice $(2,2)$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

Exercice. Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est une matrice triangulaire supérieure.

V.4 Déterminant et techniques classiques

V.4.a Déterminant de Vandermonde

Théorème-Définition (Déterminant de Vandermonde)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **déterminant de Vandermonde**, tout déterminant de la forme

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \text{où } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Alors,

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

V.4.b Relation de récurrence

On peut tenter d'établir une relation de récurrence vérifiée par Δ_n.

Exercice.

1) On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$. Etablir une relation de récurrence vérifiée par Δ_n, en déduire Δ_n.

2) On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$. Établir une relation de récurrence vérifiée par Δ_n, en déduire Δ_n.

Technique reproductible lors de calcul de déterminant matrice tridiagonale.