Déterminants $(2,2)$ - $(3,3)$

Exercice 1 Montrer sans les développer que les déterminants ci-dessous sont nuls:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 8040 \\ 3 & 5 & 3050 \\ 6 & 2 & 6020 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}$

Exercice 2 Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer et déterminer une forme factorisée des déterminants suivants:

1) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^4+b^4 & b^4+c^4 & c^4+a^4 \end{vmatrix}$

Exercice 3. Polynôme caractéristique Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **polynôme caractéristique** de A le déterminant $\det(A - \lambda I_n)$. Calculer le polynôme caractéristique et en donner une forme factorisée des matrices suivantes :

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 8) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminants (n,n)

Exercice 4 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & x+n \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 6 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 7 Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{[n]}$

Exercice 8 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$.

Exercice 9 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit Δ_n le déterminant de format $(2n, 2n)$ avec des a sur la diagonale principale et des b sur l'autre diagonale. Calculer Δ_n.

Exercice 10 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $D_n = \begin{vmatrix} a & -a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & a & -a^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -a^2 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & a \end{vmatrix}_{[n]}$. Calculer D_n en fonction de n.

Exercice 11 Calculer Δ_n le déterminant de la matrice $(\alpha i + \beta j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
Indication : on pourra utiliser la multilinéarité du déterminant.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \ldots & & a \\ b & x_2 & a & & a \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}_{[n]}$.

1) Cas $a = b$. Calculer Δ_n. *Indication : on pourra exploiter la multilinéarité du déterminant.*
2) Cas $a \neq b$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta_n(t)$ le déterminant obtenu en ajoutant t à chaque coefficient de Δ_n.
   -a- Prouver que $t \mapsto \Delta_n(t)$ est une fonction affine en t.
   -b- En déduire Δ_n.

Divers

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers ssi $\det A = \pm 1$.

Exercice 14 Soient A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$.

Exercice 15 Montrer qu'une matrice antisymétrique de format impair n'est jamais inversible.

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $A + \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{R})$.

Déterminant d'endomorphisme

Exercice 17 Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F, G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E. On désigne par s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Déterminer en fonction des dimensions de F et G, le déterminant de s.

Exercice 18 Calculer le déterminant de l'endomorphisme qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe $M^\top$.