Problème

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E.
On note Id l'application identité sur E. Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, f et g les endomorphismes de E tels que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.
On définit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par:

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}.$$

Partie I

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f est donc l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter selon λ la valeur de $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3)$.
   On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ les trois valeurs de λ tels que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) \neq 3$.
2) Déterminer alors une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.
   On choisira trois vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 dont la troisième coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1.
   On note $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
3) On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Donner la matrice P puis calculer P^{-1}.
4) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, D et P^{-1}.
5) En déduire le tableau matriciel de A^n.

Partie II

On revient au cas général où E est un espace vectoriel réel de dimension 3 de base $\mathcal{B}$.

1) Montrer que si $A - I_3$ est inversible alors il existe une unique $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$ et exprimer L en fonction de A, I_3 et B.

Le but des questions II-2) et II-3) est de prouver qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$ si et seulement si $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$.

2) Dans cette question on suppose qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
   En utilisant l'endomorphisme l de E tel que $L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(l)$, montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$.
3) Réciproquement, on suppose $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$ dans E.
   - -a- Montrer que pour tout $u \in E$, il existe un unique vecteur $v \in G$ tel que $g(u) = (\mathrm{Id} - f)(v)$ $(*)$.
     On définit alors l'application φ de E vers E qui à tout $u \in E$ associe l'unique vecteur v vérifiant l'égalité $(*)$ ci-dessus.
   - -b- Montrer que φ est un endomorphisme de E tel que: $(\mathrm{Id} - f) \circ \varphi = g$.
   - -c- En déduire l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que: $L = AL + B$.
4) Nous supposons dans cette question l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
   Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n en fonction de A, n, L et U_0.

Partie III

Dans cette partie on revient au cas particulier, $E = \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (de la partie I) et on pose } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) A l'aide de la partie II, montrer qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle $L = AL + B$.

2) Déterminer la matrice, notée T, de g relativement à la base $\mathcal{B}'$ définie en I-2).

3) Déterminer, en posant ses coefficients, une matrice $L' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les trois coefficients de la première ligne sont nuls et telle que: $L' = DL' + T$.
Donner alors une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (son tableau matriciel) telle que $L = AL + B$.

4) On choisit $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la première colonne de U_n.