Exercice 1. Séries de Bertrand On souhaite étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ en fonction de α et β réels.

1) Cas $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
   -a- Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n^2 \ln^5(n)}$
   -b- Déterminer la nature dans le cas général $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$
2) Cas $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
   -a- Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \ln^5(n)}$
   -b- Déterminer la nature dans le cas général $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$
3) Cas $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 0$. Montrer que la série diverge. *Le faire pour $\beta = -2$ si vous voulez simplifier*
4) Cas $\alpha = 1$, $\beta > 0$. Utiliser une comparaison série intégrale pour déterminer les valeurs de β pour lesquelles la série est convergente. *Le faire pour $\beta = 2$ si vous voulez simplifier*
5) Déterminer un équivalent de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$.