Exercice 1 On notera SATP pour série à termes positifs.

1) -a- On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln^5(n)}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n^2 u_n = \frac{1}{\ln^5(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2}) = \mathrm{O}(\frac{1}{n^2}).$$
- $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sont des SATP.
- $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente (série de Riemann avec 2>1).

Par comparaison des SATP, $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^2 \ln^5(n)} \text{ converge}}$.

-b- Cas $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

- On pose $\gamma \in]1, \alpha[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n^\gamma u_n = \frac{\ln^{-\beta}(n)}{n^{\alpha-\gamma}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
car $\alpha - \gamma > 0$ (par croissances comparées si $\beta < 0$ et tout simplement par opérations sur les limites si $\beta \geqslant 0$).
Donc $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^\gamma}) = \mathrm{O}(\frac{1}{n^\gamma})$.
- $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ sont des SATP.
- $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est une série convergente (série de Riemann avec 2>1).

Par comparaison des SATP, $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ converge}}$.

NB : *il était donc inutile de traiter plusieurs cas selon le signe de β, gagnez du temps.*

2) -a- On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}} \ln^5(n)}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n u_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln^5(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ à partir d'un certain rang.
- $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ sont des SATP.
- $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série divergente (série harmonique).

Par comparaison des SATP, $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}} \ln^5(n)} \text{ converge}}$.

-b- Cas $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

- On pose $\gamma \in]1, \alpha[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n u_n = \frac{n^{1-\alpha}}{\ln^\beta(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
car $1 - \alpha > 0$ (par croissances comparées si $\beta > 0$ et par opérations sur les limites si $\beta < 0$) donc $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ apcr.
- $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ sont des SATP.
- $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série divergente (série harmonique).

Par comparaison des SATP, $\boxed{\sum \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ diverge}}$.

NB : *on aurait pu traiter le cas $\alpha < 0$ qui donne la divergence grossière à part, mais la méthode ci-dessus à la mérite de fonctionner pour tout α.*

3) Cas $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n \ln^\beta(n)}$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\ln^{-\beta}(n) \geqslant \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$ car dans ce cas $\ln(n) \geqslant 1$ et comme $-\beta \geqslant 0$, alors $\ln^{-\beta}(n) \geqslant 1$.
- $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n}$ sont des SATP.
- $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série divergente (série harmonique).

Par comparaison des SATP, $\boxed{\sum \dfrac{1}{n \ln^\beta(n)} \text{ diverge}}$.

4) Cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. On pose, pour $t \in [2, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{1}{t \ln^\beta t} = \frac{1}{t}\ln^{-\beta} t$.

ln est dérivable sur $[2, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $t \mapsto t^{-\beta}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition $t \mapsto \ln^{-\beta} t$ est dérivable sur $[2, +\infty[$. Puis par produit avec la fonction inverse qui l'est aussi, la fonction f est dérivable sur $[2, +\infty[$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $[2, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Puis pour tout $t \in [2, +\infty[$,

$$f'(t) = -\frac{\ln^\beta t + \beta t \frac{1}{t} \ln^{\beta-1} t}{t^2 \ln^{2\beta} t} < 0.$$

Donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

NB : *ne pas oublier donc de justifier la décroissance de la fonction f.*

De plus f est continue par morceaux et positive, donc d'après le théorème de comparaison série-intégrale $\sum f(n)$ et $\left(\displaystyle\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ ont même nature.

- Si $\beta \neq 1$,

$$a_n = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t \ln^\beta t} = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln^{1-\beta}(t)\right]_2^n = \frac{1}{1-\beta}\left(\ln^{1-\beta}(n) - \ln^{1-\beta}(2)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta}(2) & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1 \end{cases}.$$

- Si $\beta = 1$,

$$a_n = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = [\ln(\ln(t))]_2^n = \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Conclusion: $\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{1}{n \ln^\beta(n)} \text{ converge si et seulement si } \beta > 1}$.

NB : *pour cette question inutile de mettre en oeuvre la comparaison série intégrale en encadrant la somme partielle. Il est beaucoup plus plus rapide d'utiliser le théorème qui caractérise la convergence de la série par la convergence de la suite des intégrales.*

5) Pour tout $k \in [\![3, +\infty[\![$,

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $n \geqslant 3$, on somme l'encadrement précédent, pour $k \in [\![3, n]\!]$ puis on ajoute $f(2)$,

$$f(2) + \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^n f(k) \leqslant f(2) + \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puis d'après la relation de Chasles, et en posant la somme partielle d'indice de la série étudiée $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$,

$$\frac{1}{2\ln 2} + \int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2\ln 2} + \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \qquad (*).$$

Après calcul des intégrales il vient :

$$\underbrace{\frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 3)}_{=\alpha_n} \leqslant S_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{2\ln 2} + \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)}_{=\beta_n}.$$

Notons que $\beta_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$. Puis $\alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n+1)$, et

$$\ln(\ln(n+1) = \ln\left(\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})\right) = \underbrace{\ln(\ln(n))}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty} + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}\right)}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n)).$$

Par conséquent $\beta_n \underset{+\infty}{\sim} ln(\ln(n))$.
On divise alors l'encadrement de S_n par $\ln(\ln(n)$,

$$\underbrace{\frac{\alpha_n}{\ln(\ln(n))}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1} \leqslant \frac{S_n}{\ln(\ln(n))} \leqslant \underbrace{\frac{\beta_n}{\ln(\ln(n))}}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Finalement, par théorème d'encadrement $\frac{S_n}{\ln(\ln n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ c'est-à-dire $\boxed{S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln n)}$.