Problème

Partie I

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + (3-\lambda)C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2(\lambda-2) & 3-\lambda & -2 \\ (3-\lambda)(2-\lambda) & \lambda-3 & 2-\lambda \end{pmatrix} L_3 \leftarrow 2L_3 - (\lambda-3)L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2(\lambda-2) & 3-\lambda & -2 \\ 0 & (\lambda-3)(-1+\lambda) & -2 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & (\lambda-3)(-1+\lambda) & -2 \\ 2(\lambda-2) & 3-\lambda & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}$, $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = 3$.
- Si $\lambda = 1$, $\operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$
- Si $\lambda = 2$, $\operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$
- Si $\lambda = 3$, $\operatorname{rg}(A - I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$.

Bilan, $\boxed{\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{1,2,3\} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}}$. On note $\lambda_i = i$ pour $i \in \{1,2,3\}$.

2)
- On détermine un vecteur de chacun des noyaux $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$.
  $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $C_1 + C_2 + C_3 = 0_3$ donc $e_1 + e_2 + e_3 \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$. On pose $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$.
  $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $C_1 + C_3 = 0_3$ donc $e_1 + e_3 \in \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$. On pose $e_2' = e_1 + e_3$.
  $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $-C_2 + C_3 = 0_3$ donc $-e_2 + e_3 \in \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id})$. On pose $e_3' = -e_2 + e_3$.
- On pose $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$. Alors
  $$\begin{aligned}
  \operatorname{rg}(\mathcal{B}') &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
  &= 3 = \operatorname{Card}(\mathcal{B}') = \dim \mathbb{R}^3.
  \end{aligned}$$
  Donc par caractérisation des bases, $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.
- Pour $i \in \{1,2,3\}$, comme $e_i \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})$ alors $f(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i = i$, on obtient $\boxed{D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

3) On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$. Pour le calcul de P^{-1}, notons que

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_2' = e_1 + e_3 \\ e_3' = -e_2 + e_3 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} e_2 = e_1' - e_2' \\ e_3 = e_3' + e_2 = e_1' - e_2' + e_3' \\ e_1 = e_2' - e_3 = -e_1' + 2e_2' - e_3' \end{cases} \quad \text{on déduit } \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

4) D'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, puis par récurrence on prouve que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$.

5) Comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ et après calculs $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 3^n - 1 & 1 & 1 - 3^n \\ 2^{n+1} - 3^n - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n + 3^n \end{pmatrix}}$.

———— Partie II ————

On revient au cas général où E est un espace vectoriel réel de dimension 3 de base $\mathcal{B}$.

1) Supposons $A - I_3$ est inversible. Soit $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

$$L = AL + B \Leftrightarrow (A - I_3)L = -B$$

$$\boxed{L = AL + B \Leftrightarrow L = -(A - I_3)^{-1}B}.$$

2) On suppose qu'il existe une matrice $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
Notons l l'endomorphisme de E tel que $L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(l)$.
Comme $L = AL + B$ alors $l = f \circ l + g$ donc $(\mathrm{Id} - f) \circ l = g$. On déduit :

$$\forall u \in E,\ \ g(u) = (\mathrm{Id} - f)(l - u) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f).$$

Ce qui traduit, $\boxed{\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)}$.

3) Réciproquement, on suppose $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$ dans E.

-a-
- **Existence.** Soit $u \in E$. Comme $g(u) \in \mathrm{Im}\, g$ et par hypothèse $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$ donc $g(u) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$.
Posons donc $a \in E$ tel que $g(u) = (f - \mathrm{Id})(a)$.
Puis $G \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f) = E$ donc posons $a = v + w$ où $v \in G$ et $w \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$, par conséquent

$$g(u) = (f - \mathrm{Id})(a) = (f - \mathrm{Id})(v + w) = (f - \mathrm{Id})(v) + \underbrace{(f - \mathrm{Id})(w)}_{=0_E} = (f - \mathrm{Id})(v).$$

- **Unicité.** Soit $u \in E$. Soient v_1 et v_2 dans G tels que $g(u) = (f - \mathrm{Id})(v_1) = (f - \mathrm{Id})(v_2)$.
Alors $(f - \mathrm{Id})(v_1 - v_2) = 0_E$ donc $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Par ailleurs, $v_1 - v_2 \in G$ car v_1 et v_2.
Et donc $v_1 - v_2 \in G \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$; et comme G et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires il vient $G \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{0_E\}$.
Finalement, $v_1 - v_2 = 0_E$ donc $v_1 = v_2$.
- Conclusion. $\boxed{\text{Pour tout } u \in E, \text{ il existe un unique vecteur } v \in G \text{ tel que } g(u) = (\mathrm{Id} - f)(v)\ (*)}$.
On définit alors l'application φ de E vers E qui à tout $u \in E$ associe l'unique vecteur v vérifiant l'égalité $(*)$ ci-dessus.

-b- Pour tout $u \in E$, $\varphi(u) = v \in G \subset E$ donc φ va bien de E dans E.
Par définition de φ, pour tout $u \in E$, $g(u) = (\mathrm{Id} - f)(\varphi(u))$ donc $\boxed{g = (\mathrm{Id} - f) \circ \varphi}$.
Soit $(u, u') \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. D'une part, par définition de φ

$$g(\lambda u + u') = (\mathrm{Id} - f) \circ \varphi(\lambda u + u').$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} g(\lambda u + u') &= \lambda g(u) + g(u') \quad (g \text{ linéaire}) \\ &= \lambda(\mathrm{Id} - f)\circ\varphi(u) + (\mathrm{Id} - f)\circ\varphi(u') \quad (\text{def. de } \varphi) \\ &= \lambda(\mathrm{Id} - f)(\lambda\varphi(u) + \varphi(u')). \end{aligned}$$

Et $\lambda\varphi(u) + \varphi(u') \in G$, donc par définition de l'application φ, on obtient bien

$$\lambda\varphi(u) + \varphi(u') = \varphi(\lambda u + u').$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

Autrement : d'après le théorème du rang, $\mathrm{Id} - f$ est un isomorphisme de G (qui est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - f)$ dans E) vers $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$.
Posons $h = (\mathrm{Id} - f)_{|G}$ cet isomorphisme; alors la relation $g = (\mathrm{Id} - f)\circ\varphi$ avec φ à valeur de G se réécrit : $g = h \circ \varphi$ donc $\varphi = h^{-1} \circ g$ donc g est linéaire par composition d'applications linéaires et va bien de E dans E.

-c- Notons $L = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Comme $g = (\mathrm{Id} - f)\circ\varphi$ alors en passant à l'égalité des matrices, il vient $B = (I_3 - A)L$ c'est-à-dire $\boxed{L = AL + B}$.

4) Nous supposons dans cette question l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
On adapte la méthode connue pour obtenir l'expression d'une suite numérique arithmético-géométrique.
On soustrait $L = AL + B$ à la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$ pour trouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (U_{n+1} - L) = A(U_n - L).$$

La suite $(U_n - L)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc une relation de réurrence du type géométrique, on démontre alors, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n - L = A^n(U_0 - L) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n(U_0 - L) + L}.$$

———— Partie III ————

Dans cette partie on revient au cas particulier, $E = \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (de la partie A) et on pose } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1) On cherche à prouver que $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$ soit $\mathrm{Im}\, B \subset \mathrm{Im}(I_3 - A)$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ \text{puis } C_2 \leftarrow -C_2 \end{matrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2 \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ \text{puis } C_1 \leftarrow -\frac{1}{2}C_1 \end{matrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(I_3 - A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Et donc d'après la partie II, $\boxed{\text{il existe } L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle } L = AL + B}$.

2) On calcule $g(e'_1)$, $g(e'_2)$, $g(e'_3)$ en effectuant les produits matriciels $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_i)$,

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

On déduit

$$g(e'1) = 0_{\mathbb{R}^3} \qquad g(e'_2) = e'_2 \qquad g(e'_3) = -e'_2 + e'_3.$$

Donc $\boxed{M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$.

3) Posons $L' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
L' = DL' + T &\Leftrightarrow (I_3 - D)L' = T\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -a & -b & -c\\ -2d & -2e & -2f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a = d = e = 0\\ b = -1\\ c = 1\\ f = -\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{L' = DL' + T \Leftrightarrow L' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}}.$$

D'après les formules de changement de base, $D = P^{-1}AP$ et $T = P^{-1}BP$ donc $L' = P^{-1}APL' + P^{-1}BP$.
En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, il vient $PL'P^{-1} = APL'P^{-1} + B$.

En posant $\boxed{L = PL'P^{-1} \text{ on a bien } L = AL + B}$. Après calculs, $\boxed{L = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}$

4) $U_0 - L = \begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, la première colonne de U_n est

$$\begin{pmatrix}2^{n+1} - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n\\ 3^n - 1 & 1 & 1 - 3^n\\ 2^{n+1} - 3^n - 1 & 1 - 2^n & 1 - 2^n + 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\ -\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 \times 2^{n+1} - 6\\ 3^{n+1} - \frac{7}{2}\\ 3 \times 2^{n+1} - 3^{n+1} - \frac{11}{2}\end{pmatrix}.$$