Problème

Notations

Dans tout le problème, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonales et $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices dont la diagonale est nulle.

On note $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices de trace nulle.

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls excepté celui qui se trouve à la ligne i et à la colonne j et qui vaut 1 .

On rappelle que le symbole de Kronecker est défini par : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

On définit les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme (S) par :

$$M \text{ est de la forme } (S) \iff \exists (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, M = XY - YX$$

On désigne par $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Enfin, on rappelle qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f = \lambda \,\mathrm{id}$.

Un des objectifs du problème est de démontrer que :

$$M \text{ est de la forme } (S) \text{ si et seulement si } M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R}).$$

I-Préliminaires

1) Quelques dimensions. Aucune preuve n'est demandée pour cette question.

   -a- Rappeler la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en donner une base.

   -b- Vérifier que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension.

   -c- Vérifier que $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension.

   -d- Vérifier que $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en donner une base et sa dimension.

2) Caractérisation des homothéties. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

   -a- Montrer que si f est une homothétie, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n, (x, f(x))$ est une famille liée.

   -b- Réciproquement, on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, (x, f(x))$ est une famille liée. Montrer que f est une homothétie.

II-Lien entre la forme (S) et $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$

Dans cette partie, nous allons démontrer que toute matrice de $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme (S).

Soit $n \geqslant 1$, on considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

et on définit l'application L de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$L : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & A_n M - M A_n \end{array}.$$

1) Démontrer que L est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) -a- Montrer que pour tous $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4, E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

-b- En déduire $L(E_{i,j}) = (i-j)E_{i,j}$ pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

3) -a- Montrer à l'aide de la question précédente que $\mathrm{Im}(L) = \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$.

-b- Montrer que $\mathrm{Ker}(L) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser avec profit le théorème du rang.

-c- En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(L) \oplus \mathrm{Im}(L)$.

4) Démontrer que : $\forall M \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}), \quad \exists! X \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}), \quad M = A_nX - XA_n$.

III-Lien entre $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}$ et $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$

Soit $n \geqslant 1$, dans cette partie nous allons démontrer par récurrence l'assertion :

$$\mathcal{H}_n : \text{“}\forall M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R}), \quad \exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad \text{tel que } P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})\text{”}$$

1) Démontrer que $\mathcal{H}_1$ est vraie.

On prend à présent $n \geqslant 2$ et l'on suppose que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vraie. Prenons une matrice $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ et essayons de montrer que $\mathcal{H}_n$ est vraie.

2) Traiter le cas où M est la matrice nulle. On suppose dans toute la fin de cette partie que M n'est pas la matrice nulle et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M.

3) -a- Démontrer que φ n'est pas une homothétie.

-b- Montrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(u_1, \varphi(u_1))$ soit une famille libre.

-c- On note $u_2 = \varphi(u_1)$, justifier l'existence de $n-2$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $u_3, \ldots, u_n$ tels que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

4) On note M' la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$.

-a- Quelle est la première colonne de M' ?

-b- On note P_1 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, quelle relation a-t-on entre M, M' et P_1 ?

5) On décompose M' en blocs : $M' = \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & W \end{pmatrix}$ où $U \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}), V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$.

-a- Montrer que $M' \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$.

-b- En déduire que $W \in \mathcal{T}_{n-1}^0(\mathbb{R})$, puis qu'il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}WQ \in \mathcal{D}_{n-1}^0(\mathbb{R})$.

6) On considère la matrice $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q \end{pmatrix}$ où $0_{1,n-1}$ et $0_{n-1,1}$ sont les matrices nulles de $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ respectivement.
En cherchant une matrice inverse de P_2 par blocs, montrer que P_2 est inversible et donner P_2^{-1}.

7) On note $P = P_1P_2$, démontrer que $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et que $P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$. En déduire $\mathcal{H}_n$.

IV-Lien entre la forme (S) et $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$

On en vient au coeur du problème où l'on va démontrer que :

$$M \text{ est de la forme } (S) \text{ si et seulement si } M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$$

1) Soit $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de la forme (S), $(X', Y') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $M' = X'Y' - Y'X'$. On considère M semblable à M' et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PM'P^{-1}$.

-a- Montrer que M est aussi de la forme (S) et donner deux matrices $(X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ en fonction des précédentes telles que $M = XY - YX$.

-b- Justifier que $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ si et seulement si M est de la forme (S).

2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base

canonique est M.

-a- Trouver une base $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de φ appartient à $\mathcal{D}_3^0(\mathbb{R})$.

-b- Exhiber deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M = XY - YX$.

E-Matrices nilpotentes et trace.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est nilpotente si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0_n$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de démontrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$.

1) -a- Parmi les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, lesquelles sont nilpotentes?

   -b- Démontrer que si $n \geqslant 2, \mathcal{N}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$, démontrer que $M \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

3) On considère une matrice M nilpotente d'indice n, c'est-à-dire que $M^n = 0_n$ et $M^{n-1} \neq 0_n$ et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

   -a- Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\big(u, \varphi(u), \ldots, \varphi^{n-1}(u)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

   -b- En déduire que $\mathrm{tr}(M) = 0$.

4) Démontrer dans le cas général qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.

5) Démontrer le résultat annoncé au début de cette partie.

Problème. Transposition

Facultatif - N'est pas à rendre

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$.

On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $E, \mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E et on note $E^\star$ l'ensemble des formes linéaires de E.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\varphi \in E^\star$, on note $f^\top(\varphi) = \varphi \circ f$.

L'application $f \mapsto f^\top$ est appelée transposition de $\mathcal{L}(E)$.

1) -a- Montrer que la transposition est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}\left(E^\star\right)$.

   -b- Montrer que cette application est linéaire.

   -c- Montrer que cette application est un isomorphisme.

2) Montrer que pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E), (f \circ g)^\top = g^\top \circ f^\top$.

3) -a- Identifier l'application $(\mathrm{Id}_E)^\top$.

   -b- Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $f^\top \in \mathrm{GL}\left(E^\star\right)$ et que $\left(f^\top\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^\top$.

   -c- Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^\top \in \mathrm{GL}\left(E^\star\right)$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$.

4) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

   -a- Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, montrer qu'il existe une unique application $e_i^\star \in E^\star$ tel que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad e_i^\star\left(e_j\right) = \delta_{i,j}$$

   -b- Montrer que $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \cdots, e_n^\star)$ est une base de $E^\star$. $\mathcal{B}^\star$ s'appelle la base duale de $\mathcal{B}$.

   -c- Montrer que, pour tout $\varphi \in E^\star$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(e_i\right) e_i^\star$$

   -d- Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E.
   Montrer que la matrice de $f^\top$ dans la base $\mathcal{B}^\star$ est $A^\top$.

5) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f^\top\right)$.

6) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\left(f^\top\right)$.

7) Soit $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \cdots, e_n^\star)$ une base de $E^\star$.

   -a- En considérant l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = (e_1^\star(x), \cdots, e_n^\star(x))$, montrer qu'il existe $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E vérifiant

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, e_i^\star\left(e_j\right) = \delta_{i,j}.$$

   $\mathcal{B}$ s'appelle la base antéduale de $\mathcal{B}^\star$.

   -b- Soit f un endomorphisme de E tel que la matrice de $f^\top$ dans la base $\mathcal{B}^\star$ soit A. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A^\top$.