Problème

I-Préliminaires

1) -a- $\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2\text{, la base canonique est } (E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}}$.

-b- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ qui est une base, sa dimension est donc n.

-c- $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $(E_{ij})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}$ qui est une base, sa dimension est donc n^2-n.

-d- $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\left\{(E_{ij})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\right\} \cup \left\{(E_{ii}-E_{11})_{2\leqslant i\leqslant n}\right\}$ qui est une base, sa dimension est donc n^2-1.
Notons que $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ est le noyau de la forme linéaire non nulle Trace.

2) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

-a- Supposons que f est une homothétie, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \lambda x$. Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n, (x, f(x)) \text{ est une famille liée}}$.

-b- Réciproquement, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, (x, f(x))$ est une famille liée.
Soit $a \in \mathbb{R}^n$ non nul, alors par hypothèse $(f(a), a)$ est liée donc comme a est non nul, il existe $\lambda_a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda_a a$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrons que $f(x) = \lambda_a x$.
Si x est proportionnel à a, alors $x = \alpha a$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, donc

$$f(x) = f(\alpha a) = \alpha f(a) = \alpha\lambda_a a = \lambda_a x.$$

Sinon, (x, a) forme une famille libre.
Par hypothèse il existe λ_x et λ_{x+a} réels tels que :

$$f(x) = \lambda_x x \qquad\qquad f(a+x) = \lambda_{a+x}(a+x).$$

Par ailleurs, par linéarité de

$$f(a+x) = f(a) + f(x) = \lambda_a a + \lambda_x x.$$

Donc en rapprochant les deux expressions de $f(a+x)$,

$$\lambda_a a + \lambda_x x = \lambda_{a+x}(a+x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad (\lambda_a - \lambda_{a+x})a + (\lambda_x - \lambda_{a+x})x = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Comme (x, a) est libre, il s'ensuit que $\lambda_a - \lambda_{a+x} = \lambda_x - \lambda_{a+x} = 0$ donc $\lambda_x = \lambda_a$.
Donc $\boxed{f \text{ est une homothétie}}$.

II-Lien entre la forme (S) et $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$

1) Comme $\mathcal{M}_\backslash(\mathbb{R})$ est stable par produit et par soustraction alors L est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Puis la distributivité de la multiplication sur l'addition prouve que L est linéaire.
Donc $\boxed{L \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2) -a- Soit $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$. Toutes les lignes nulles de E_{ij} et les colonnes nulles de E_{kl} donnent par produit un coefficient nul.
La i-ème ligne non nulle de E_{ij} que multiplie la l-ème colonne non nulle de E_{kl}, donne :

- 0 si $j \neq k$ et alors le produit $E_{ij}E_{kl}$ est nul
- 1 si $j = k$ et alors le produit $E_{ij}E_{kl}$ vaut E_{il}.

Bilan : $\boxed{E_{ij}E_{kl} = \delta_{j,k}E_{il}}$.

-b- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, comme $A_n = \sum_{k=1}^{n} kE_{kk}$,

$$\begin{aligned} L(E_{ij}) &= A_n E_{ij} - E_{ij} A_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(E_{kk}E_{ij} - E_{ij}E_{kk}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(\delta_{i,k}E_{kj} - \delta_{j,k}E_{ik}) \end{aligned}$$

$$\boxed{L(E_{ij}) = (i-j)E_{ij}}.$$

3) -a- $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Vect}\left((f(E_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) = \mathrm{Vect}\left(((i-j)E_{ij})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\right)$.
On a retiré les cas $i=j$ qui donnent $(i-j)E_{ij} = 0_n$.
Et donc d'après I-1)-c-, $\boxed{\mathrm{Im}(L) = \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})}$.

-b- D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}(L) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}(L) = n^2 - (n^2 - n) = n.$$

Et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $L(E_{ii}) = 0_n$.
Donc $(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de $\mathrm{Ker}(L)$, libre car extraite de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et contient $n = \dim \mathrm{Ker}(L)$ éléments, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(L)$.
Et comme d'après I-1)-b-, cette famille est aussi une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ alors $\boxed{\mathrm{Ker}(L) = \mathcal{D}_n(\mathbb{R})}$.

-c- $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car la concaténation des bases obtenues en I-1) donne une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc d'après II-3)-b-, $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(L) \oplus \mathrm{Im}(L)}$.

4) D'après la question précédente, $\mathrm{Im}(L)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(L)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème du rang, L réalise un isomorphisme de ce supplémentaire $\mathrm{Im}(L)$ vers $\mathrm{Im}(L)$.
Comme $\mathrm{Im}(L) = \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$, on a bien

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}), \quad \exists! X \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}), \quad M = A_nX - XA_n}.$$

III-Lien entre $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{R}$ et $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$

Soit $n \geqslant 1$, dans cette partie nous allons démontrer par récurrence l'assertion :

$$\mathcal{H}_n : \text{“}\forall M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R}), \quad \exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \quad \text{tel que } P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})\text{”}$$

1) Soit $M \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R})$, alors $M = (0)$ et donc en prenant $P = (1) \in GL_1(\mathbb{R})$ on a bien $P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$.
Donc $\boxed{\mathcal{H}_1 \text{ est vraie}}$.

On prend à présent $n \geqslant 2$ et l'on suppose que $\mathcal{H}_{n-1}$ est vraie. Prenons une matrice $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ et essayons de montrer que $\mathcal{H}_n$ est vraie.

2) Si M est la matrice nulle alors avec $P = I_n$ on a bien $P^{-1}MP = 0_n$.
On suppose dans toute la fin de cette partie que M n'est pas la matrice nulle et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M.

3) -a- Par l'absurde, si φ est une homothétie alors $\varphi = \lambda\,\mathrm{Id}$ donc $\mathrm{Trace}(M) = \mathrm{Trace}(\varphi) = \lambda\mathrm{Trace}(\mathrm{Id}) = \lambda n$.
On $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Trace}(M) = 0$ donc $\lambda = 0$, ce qui est absurde car φ n'est pas nulle.
Donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas une homothétie}}$.

-b- Donc d'après I-2)-b-, $\boxed{\text{il existe } u_1 \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } (u_1, \varphi(u_1)) \text{ soit une famille libre}}$.

-c- On note $u_2 = \varphi(u_1)$. Comme (u_1,u_2) est libre, d'après le théorème de la base incomplète $\boxed{\text{il existe } n-2 \text{ vecteurs de } \mathbb{R}^n : u_3,\dots,u_n \text{ tels que } \mathcal{C} = (u_1,u_2,u_3,\dots,u_n) \text{ soit une base de } \mathbb{R}^n}$.

4) On note M' la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$.

-a- Comme $\varphi(u_1) = u_2$, la première colonne est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

-b- On note P_1 la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Alors $\boxed{M' = P_1^{-1} M P_1}$.

5) On décompose M' en blocs : $M' = \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & W \end{pmatrix}$ où $U \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R}), V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $W \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$.

-a- M' et M représentent le même endomorphisme φ de trace nulle car $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$, donc $\boxed{M' \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})}$.

-b- Or d'après la forme bloc de M, $\text{Trace}(M') = 0 + \text{Trace}(W)$ donc $\text{Trace}(W) = 0$ donc $W \in \mathcal{T}_{n-1}^0(\mathbb{R})$ et donc comme $\mathcal{H}_{n-1}$ est vraie alors $\boxed{\text{il existe } Q \in GL_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } Q^{-1}WQ \in \mathcal{D}_{n-1}^0(\mathbb{R})}$.

6) On considère la matrice $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q \end{pmatrix}$ où $0_{1,n-1}$ et $0_{n-1,1}$ sont les matrices nulles de $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ respectivement.
On remarque que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n.$$

Donc $\boxed{P_2 \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q^{-1} \end{pmatrix}}$.

7) On note $P = P_1 P_2$. Comme P est le produit de deux matrices inversibles, $\boxed{P \in GL_n(\mathbb{R})}$. Puis

$$\begin{aligned} P^{-1}MP &= P_2^{-1} P_1^{-1} M P_1 P_2 = P_2^{-1} M' P_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & U \\ V & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & UQ \\ Q^{-1}V & Q^{-1}WQ \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme d'après III-5)-b-, $Q^{-1}WQ \in \mathcal{D}_{n-1}^0(\mathbb{R})$ alors $P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{On a donc prouvé } \mathcal{H}_n}$.
Conclusion : l'initialisation a été prouvée en III-1) et l'hérédité dans le reste, on a donc prouvé que $\boxed{\mathcal{H}_n \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

IV-Lien entre la forme (S) et $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$

1) Soit $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de la forme $(S), (X', Y') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $M' = X'Y' - Y'X'$. On considère M semblable à M' et $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PM'P^{-1}$.

-a-

$$\begin{aligned} M &= PM'P^{-1} \\ &= P(X'Y' - Y'X')P^{-1} \\ &= (PX'P^{-1})(PY'P^{-1}) - (PY'P^{-1})(PX'P^{-1}) \end{aligned}$$

$$\boxed{M = XY - YX \text{ avec } X = PX'P^{-1} \text{ et } Y = PY'P^{-1}}.$$

Donc $\boxed{M \text{ est aussi de la forme } (S)}$.

-b- Supposons que M est de la forme (S) alors $M = XY - YX$ où $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\mathrm{Trace}(M) = \mathrm{Trace}(XY) - \mathrm{Trace}(YX) = O.$$

Donc $\boxed{M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})}$.

Réciproquement, supposons $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$. Alors d'après la propriété $\mathcal{H}_n$ prouvée dans III, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$.

Donc d'après le résultat de la partie II, il existe $X \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP = A_nX - XA_n$. Donc $P^{-1}MP$ est de la forme (S) et donc d'après IV-1)-a-, $\boxed{M \text{ est de la forme } (S)}$.

On a donc bien : $\boxed{M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } M \text{ est de la forme } (S)}$.

2) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

-a- On s'inspire de III-3) et 4) pour construire cette base.

On pose $u_1 = e_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = \varphi(u_1) = \varphi(e_1) = (1,3,2)$.

Pour déterminer u_3, on souhaite que la composante de $\varphi(u_2)$ sur u_2 soit nul :

$$\varphi(u_2) = (11,9,3) = 11(1,0,0) + 0(1,3,2) + (0,9,3) = 11u_1 + 0u_2 + 3u_3 \text{ où on a posé } u_3 = (0,3,1).$$

On a alors :

$$\varphi(u_3) = (5,3,2) = 4(1,0,0) + (1,3,2) = 4u_1 + u_2 + 0u_3.$$

On pose alors $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{C}) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{C}) = \dim \mathbb{R}^3.$$

Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et

$$M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) \in \mathcal{D}_3^0(\mathbb{R})}.$$

-b- On s'inspire de la méthode générale de l'énoncé, pour trouver d'abord un antécédent de M' par L. On décompose M' :

$$M' = 11E_{12} + 4E_{13} + E_{21} + E_{23} + 3E_{32}.$$

On rappelle que d'après II-2)-b-, $L(E_{ij}) = (i-j)E_{ij}$ donc :

$$\begin{aligned} M' &= -11L(E_{12}) - 2L(E_{13}) + L(E_{21}) - L(E_{23}) + 3L(E_{32}) = L(-11E_{12} - 2E_{13} + E_{21} - E_{23} + 3E_{32}) \\ &= L(Y') \text{ où } Y' = \begin{pmatrix} 0 & -11 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A_3Y' - Y'A. \end{aligned}$$

Puis $M' = P^{-1}MP$, donc d'après IV-1)-a-,

$$\boxed{M = XY - YX \text{ avec } X = PA_3P^{-1} \text{ et } Y = PY'P^{-1}.}$$

V-Matrices nilpotentes et trace.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est nilpotente si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0_n$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est de démontrer que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$.

1) -a- Soit $(i,j)[\![1,n]\!]^2$, d'après II-2)-a-,

$$E_{ij}^2 = E_{ij}E_{ij} = \delta_{i,j}E_{ij} = \begin{cases} 0_n & \text{si } i \neq j \\ E_{ii} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Donc $E_{ii}^p = E_{ii}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Donc $\boxed{\text{seules les } E_{ij} \text{ où } i \neq j \text{ sont nilpotentes}}$.

-b- E_{12} et E_{21} sont nilpotentes et pourtant $E_{12} + E_{21}$ ne l'est pas. En effet,

$$(E_{12} + E_{21})^2 = (E_{12})^2 + E_{12}E_{21} + E_{21}E_{12} + (E_{21})^2 = E_{11} + E_{22}.$$

$$(E_{12} + E_{21})^3 = (E_{11} + E_{22})(E_{12} + E_{21}) = E_{12} + E_{21}.$$

Par récurrence immédiate on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(E_{12} + E_{21})^n = \begin{cases} E_{11} + E_{22} & \text{si } n \text{ pair} \\ E_{12} + E_{21} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

Et donc $E_{12} + E_{21}$ n'est pas nilpotente.
On a bien prouvé que $\boxed{\mathcal{N} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2) Soit $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$. D'après la partie III, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^0(\mathbb{R})$.
Alors

$$P^{-1}MP = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}E_{ij} \text{ donc } M = \sum_{i \neq j} \lambda_{ij}PE_{ij}P^{-1}.$$

Or :

$$(PE_{ij}P^{-1})^2 = PE_{ij}^2P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n.$$

Donc $PE_{ij}P^{-1}$ est nilpotente, on a donc bien $\boxed{M \in \text{Vect}(\mathcal{N})}$.

3) On considère une matrice M nilpotente d'indice n, c'est-à-dire que $M^n = 0_n$ et $M^{n-1} \neq 0_n$ et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

-a- Question très classique faite à plusieurs reprises. On pose alors $\boxed{u \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \big(u, \varphi(u), \ldots, \varphi^{n-1}(u)\big) \text{ soit une base de } \mathbb{R}^n}$.

-b- La matrice de φ dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont la trace est nulle, donc celle de φ l'est aussi et donc $\boxed{\text{Trace}(M) = 0}$.

4) On raisonne par récurrence sur la taille de la matrice.
On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: "toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente est de trace nulle."

- **Initialisation**. Soit N une matrice nilpotente de format $(1,1)$ alors $N = (a)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, comme $N^p = (a^p)$ la nilpotence de N implique que a et donc N est nulle. Donc N est de trace nulle.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ supposons que $\mathcal{P}(n-1)$ est vraie.
Soit N une matrice nilpotente de format (n,n), on pose φ l'endomorphisme canonique associé à N et $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$.
Comme N est nilpotente alors N n'est pas inversible (par l'absurde supposons qu'elle le soit, alors toute puissance de N l'est ce qui contredit $N^p = 0_n$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$).
Donc φ n'est pas bijective, et comme φ est un endomorphisme en dimension finie alors φ n'est pas injective, posons alors u non nul tel que $\varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

On complète (u) en une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. La matrice de φ dans cette base est de forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & N' \end{pmatrix}.$$

On élève à la puissance p, la structure triangulaire par blocs de la matrice ci-dessus,

$$0_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi^p) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & (N')^p \end{pmatrix}.$$

Donc N' est elle-même nilpotente et de format $(n-1, n-1)$ donc par hypothèse de récurrence N' est de trace nulle. Et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ est elle aussi de trace nulle et donc N est de trace nulle.

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Une matrice nilpotente est de trace nulle}}$.

5) D'après V-2), on l'inclusion $\mathcal{T}_n^0(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.

Réciproquement, soit $M \in \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$ alors $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i N_i$ où les λ_i sont réels, et les N_i des matrices nilpotentes.
Donc d'après V-4) et la linéarité de la trace on obtient $\mathrm{Trace}(M) = 0$ et donc $M \in \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})$.

Bilan : $\boxed{\mathrm{Vect}(\mathcal{N}) = \mathcal{T}_n^0(\mathbb{R})}$.

Problème. Transposition

Facultatif - N'est pas à rendre

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E désigne un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$.

On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de $E, \mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E et on note $E^\star$ l'ensemble des formes linéaires de E.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et tout $\varphi \in E^\star$, on note $f^\top(\varphi) = \varphi \circ f$.

L'application $f \mapsto f^\top$ est appelée transposition de $\mathcal{L}(E)$.

1) -a- Montrer que la transposition est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}\left(E^\star\right)$.

   -b- Montrer que cette application est linéaire.

   -c- Montrer que cette application est un isomorphisme.

2) Montrer que pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E), (f \circ g)^\top = g^\top \circ f^\top$.

3) -a- Identifier l'application $(\mathrm{Id}_E)^\top$.

   -b- Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. Montrer que $f^\top \in \mathrm{GL}\left(E^\star\right)$ et que $\left(f^\top\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^\top$.

   -c- Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^\top \in \mathrm{GL}\left(E^\star\right)$. Montrer que $f \in \mathrm{GL}(E)$.

4) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

   -a- Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, montrer qu'il existe une unique application $e_i^\star \in E^\star$ tel que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad e_i^\star\left(e_j\right) = \delta_{i,j}$$

   -b- Montrer que $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \cdots, e_n^\star)$ est une base de $E^\star$. $\mathcal{B}^\star$ s'appelle la base duale de $\mathcal{B}$.

   -c- Montrer que, pour tout $\varphi \in E^\star$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(e_i\right) e_i^\star$$

   -d- Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E.
   Montrer que la matrice de $f^\top$ dans la base $\mathcal{B}^\star$ est $A^\top$.

5) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f^\top\right)$.

6) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\left(f^\top\right)$.

7) Soit $\mathcal{B}^\star = (e_1^\star, \cdots, e_n^\star)$ une base de $E^\star$.

   -a- En considérant l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi(x) = (e_1^\star(x), \cdots, e_n^\star(x))$, montrer qu'il existe $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E vérifiant

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n, e_i^\star\left(e_j\right) = \delta_{i,j}.$$

   $\mathcal{B}$ s'appelle la base antéduale de $\mathcal{B}^\star$.

   -b- Soit f un endomorphisme de E tel que la matrice de $f^\top$ dans la base $\mathcal{B}^\star$ soit A. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $A^\top$.