Chapitre
Ensembles finis - Dénombrement

I Ensembles finis

Conformément au programme, on adoptera un point de vue intuitif pour les définitions et la plupart des théorèmes. Ce qui nous vaudra d'admettre sans démonstration la plupart des théorèmes de la partie I.

I.1 Cardinal d'un ensemble fini

Théorème-Définition (Ensemble fini-Cardinal)

Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E et $[\![1,n]\!]$ sont en bijection (i.e. il existe une bijection de E sur $[\![1,n]\!]$).
Cet entier n est unique, il s'appelle le **cardinal** de E et est noté $\operatorname{Card} E$ ou $\# E$ ou encore $|E|$.
Par convention $\operatorname{Card} \emptyset = 0$.

☞ **Explication** ☜ Exhiber une bijection entre E et $[\![1,n]\!]$, c'est numéroter les éléments de E. c'est-à-dire réussir à les compter: le premier, le deuxième, le troisième...
Un ensemble fini E non vide peut donc être noté : $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ où $n = \operatorname{Card} E \in \mathbb{N}^*$.

✎ Méthode pratique ✎ (Dénombrer)

Dénombrer un ensemble E c'est en compter le nombre d'éléments. On pourra parfois montrer qu'il existe une bijection entre E et un ensemble F dont on connait le cardinal.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n points distincts en position générale. Combien de droites passant par deux de ces points peut-on construire ?

I.2 Ensembles finis et injection, surjection, bijection

Théorème (Partie d'un ensemble fini)

Soit E un ensemble fini et A **une partie de** E. Alors

1) A est fini et $\operatorname{Card} A \leqslant \operatorname{Card} E$.

2) **Caractérisation de l'égalité de deux ensembles finis**

$$A = E \iff \operatorname{Card} A = \operatorname{Card} E.$$

Théorème (Caractérisation des bijections entre ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles finis avec $\boxed{\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F}$ et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Alors :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective } \boxed{\textbf{ou}} \text{ surjective.}$$

I.3 Opérations sur les cardinaux

Théorème (Réunion - Complémentaire)

Soit E un ensemble fini.

1) **Réunion.** Soit $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ alors $A \cup B$ est fini et

$$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card} A \cap B.$$

Si de plus A et B sont disjoints :

$$\operatorname{Card} A \cup B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B.$$

2) **Partition.** Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une partition de E, c'est-à-dire :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \qquad \text{et} \qquad A_1, \ldots, A_n \text{ sont deux à deux disjoints.}$$

Alors :

$$\operatorname{Card}(E) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(A_i).$$

3) **Complémentaire.** Soit A une partie de E, alors A^c est fini et

$$\operatorname{Card} A^c = \operatorname{Card} E - \operatorname{Card} A.$$

NB: A^c peut aussi être noté $\overline{A}$ (notamment dans un contexte probabiliste).

✎ Méthode pratique ✎ (Dénombrement par disjonction de cas)

Pour compter les éléments d'un ensemble A, on décompose cet ensemble en réunion d'ensembles deux à deux disjoints :

$$\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Card} A_k.$$

Cette décomposition correspond à une disjonction de cas.

Théorème (Produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles finis non vides et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors:

1) $E \times F$ est fini et $\operatorname{Card} E \times F = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F$

2) E^n est fini avec $\operatorname{Card} E^n = (\operatorname{Card} E)^n$.

NB: cette formule se généralise au cas de n parties

$$\operatorname{Card}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \operatorname{Card}(E_1) \times \cdots \times \operatorname{Card}(E_n).$$

✎ Méthode pratique ✎ (Principe multiplicatif)

Lorsqu'un dénombrement se décompose en étapes successives indépendantes, les possiibilités offertes à chaque étape se multiplient. Cela revient à compter les éléments $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un ensemble avec :

- N_1 valeurs possibles pour x_1
- pour toute valeur x_1, N_2 valeurs possibles de x_2
- pour tout couple (x_1, x_2), N_3 valeurs possibles de x_3
- etc...

Par principe multiplicatif, le nombre total de p-uplets est $N = N_1 \cdots N_p$.

Exercice.

1) Nombre de codes d'un cadenas à 4 chiffres, à 4 chiffres distincts

2) Nombre de menus: 4 entrées, 2 plats, 3 desserts

3) Combien existe-t-il de numéros de plaque d'immatriculation?

4) Déterminer le nombre de diviseurs de 10800.

II Applications entre ensembles finis

Théorème (Nombre d'applications)

Soient E et F deux ensembles finis non vides. Alors $\mathcal{F}(E,F)$ est fini et

$$\operatorname{Card}\mathcal{F}(E,F) = \operatorname{Card}(F^E) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}.$$

Théorème-Définition (Nombre d'injections)

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On pose $p = \operatorname{Card} E$ et $n = \operatorname{Card} F$.

Le **nombre d'applications injectives** de E dans F est $\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Théorème-Définition (Permutations)

Soient E un ensemble fini non vide.

- Une bijection de E dans E est appelée **une permutation de** E. L'ensemble des permutations de E, noté $\mathcal{B}(E)$, est fini et
$$\operatorname{Card}(\mathcal{B}(E)) = (\operatorname{Card} E)!.$$
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. L'ensemble S_n est fini et
$$\operatorname{Card}(S_n) = n!.$$

Exercice.

1) Déterminer le nombre de façons de ranger 15 livres sur une étagère.
Et si parmi ces 15 livres deux livres sont les tomes 1 et 2 d'un roman, que l'on souhaite ranger dans cet ordre? dans un ordre quelconque?

2) -a- Combien de façons de disposer 5 femmes et 5 hommes autour d'une table?
-b- Et si on impose l'alternance une femme-un homme.

Théorème (Ensemble des parties de E : $\mathcal{P}(E)$)

Soit E un ensemble fini non vide. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini et

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = 2^{\operatorname{Card} E}.$$

III Listes - Combinaisons - Dénombrement

III.1 Listes

Définition (p-liste)

Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Une p-**liste** de E est un p-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire un élément $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p.

Théorème (Nombre de p-listes)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1) **Le nombre de p-listes** de E est égal à n^p.

2) **Le nombre de p-listes de E d'éléments distincts** est égal à $\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

☞ **Explication** ☜

- Dans une p-liste, il peut y avoir répétition et l'ordre importe.
- Dans une p-liste d'éléments distincts, il ne peut pas y avoir répétition et l'ordre importe.

Exemples

1) Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $(1, 2, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ sont des 3-listes de E, toutes différentes car l'ordre importe.

2) Un code de cadenas à 4 chiffres de 0 à 9 est :
Le nombre de codes possibles est :

3) Une arrivée de tiercé où 20 chevaux concourent est :
Le nombre de tiercés possibles est :

Remarques (Lien avec le nombre d'applications)

1) On retrouve pour le nombre de p-listes de E, le nombre d'applications d'un ensemble de p éléments vers un ensemble à n éléments car cela revient à numéroter de 1 à p, p éléments de E, E qui en contient n donc à construire une application de $[\![1, p]\!]$ vers E.

2) On retrouve pour le nombre de p-listes de E d'éléments **distincts**, le nombre d'injections d'un ensemble de p éléments vers un ensemble à n éléments car cela revient à numéroter de 1 à p, p éléments distincts de E qui en contient n donc à construire une application injective de $[\![1, p]\!]$ vers E.

3) Notons qu'alors, déterminer les permutations de E revient à déterminer les n-listes de E.

III.2 Combinaisons

Définition (p-combinaison)

Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$.
Une **p-combinaison** de E est une partie de E à p éléments.

☞ **Explication** ☜ Dans une p-combinaison, il ne peut pas y avoir répétition et l'ordre n'importe pas.

Exemples

1) Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $\{1, 2, 3\}$ est une 3-combinaison de E; $\{1, 3, 2\}$ est la même 3-combinaison, l'ordre n'importe pas. La combinaison $\{1, 1, 2\}$ est en fait la 2-combinaison $\{1, 2\}$.

2) Un tirage du loto est une combinaison (pas d'ordre).

Théorème (Nombre de p-combinaisons)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

Le **nombre de p-combinaisons de E** est $\begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leqslant p \leqslant n \end{cases}$

Remarques

1) Le nombre de façons de choisir p éléments parmi n est donc $\dbinom{n}{p}$, d'où la terminologie "p parmi n".

2) Pour cette raison, on pose parfois par convention $\dbinom{n}{p} = 0$ pour $p > n$.

3) Le nombre $\dbinom{n}{p}$ est donc un entier.

Exercice.

1) On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

-a- Combien de mains possibles?

-b- Combien de mains avec exactement 2 as?

-c- Combien de mains avec au moins un as?

-d- Combien de mains avec exctement un coeur et exactement un roi?

-e- Combien de mains avec au moins un coeur et au moins un pique?

Rappelons toutes ces formules vues plus tôt, que l'on prouve ici à l'aide **d'argument combinatoire** c'est-à-dire par le dénombrement.

Théorème (Relations coefficients binomiaux)

1) **Formule de symétrie**. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

2) **Formule du triangle de Pascal**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p}$.

3) **Formule du sélectionneur**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\dbinom{n-1}{p-1}$.

Puis la formule du binôme et ses conséquences:

Théorème (Formule du binôme de Newton)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) **Formule du binôme de Newton.** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

2) **Nombre de parties d'un ensemble à n éléments.** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

Remarques (Hors-programme)

Autres formules remarquables :

1) **Formule de Vandermonde.** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{a}{p}\binom{b}{n-p}=\binom{a+b}{n}$

2) **Somme des éléments d'une colonne dans le triangle de Pascal.** $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$.

III.3 Résumé de quelques méthodes classiques de dénombrement

✎ Méthode pratique ✎ (Méthode classiques de dénombrement)

- **Principe multiplicatif**. Lorsqu'un dénombrement de décompose en étapes successives, les possibilités offertes à chaque étape se multiplient.
- **Passage au complémentaire**. Il est parfois plus simple de dénombrer $\mathrm{Card}(A^c)$ que $\mathrm{Card}(A)$. Souvent des énoncés à base de: "au moins...".
- **Disjonctions de cas**. On décompose l'ensemble à dénombrer en réunion d'ensemble deux à deux disjoints.
- **Reconnaître une situation de référence**. Les problèmes de dénombrement se ramènent souvent à l'une des situations suivantes pour lesquelles on connait des résultats de dénombrement:
  - listes si éléments choisis avec **ordre**, **répétition** (n^p)
  - listes d'éléments distincts si éléments choisis **avec ordre**, **sans répétition** ($\dfrac{n!}{(n-p)!}$)
  - permutation si **ordre, pas de répétition et tous les éléments sont pris** ($n!$)
  - combinaisons quand choix simultané d'objets donc **sans ordre, sans répétition**. ($\dbinom{n}{p}$).
- **Introduire une bijection.** Dans certains cas, on introduit une bijection entre l'ensemble à dénombrer et un ensemble pus facile à dénombrer.

Exercice.

1) -a- Combien de codes à 4 chiffres contenant au moins un 0.

   -b- Combien de codes à 4 chiffres contenant au plus un 0.

2) On effectue un tirage de 3 boules dans une urne contenant 10 boules. Combien de tirages dans les cas suivants :

   -a- tirage successif avec remise

   -b- tirage successif sans remise

   -c- tirage simultané.