Convergence et calculs de sommes

Exercice 1. ($\heartsuit$) Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes:

1) -a- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}$ -b- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ -c- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^{n-3}}{3^{2n+2}}$ -d- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-3)^{n+1}5^{-2n+1}$

2) -a- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{3^n n!}$ -b- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2^{2n-3}}{n!}$ -c- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{5^n}{(n+2)!}$ -d- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3}\frac{3^{2n-5}}{(n-2)!}$

Exercice 2. ($\heartsuit$)Série géométrique des dérivées Soit $x\in]-1,1[$.

1) Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} nx^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n-1)x^{n-2}$ convergent et calculer leur somme.
2) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2x^n$ converge et calculer sa somme.
3) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} n(n+2)x^{2n+1}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3. ($\heartsuit$) Montrer la convergence et calculer la somme des séries:
$\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\cos(n\theta)$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\sin(n\theta)$ où $\theta\in\mathbb{R}$ et $x\in]-1,1[$

Exercice 4. ($\heartsuit$) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n-1}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 5. ($*$) Étudier la nature des séries suivantes et dans le cas de convergence, calculer la somme.

1) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

Exercice 6. ($*$) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge et calculer la somme.

Exercice 7. ($**$) Soit $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\displaystyle\sum\ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ converge et calculer sa somme.
On pourra utiliser $\sin(2a)=....?$

Exercice 8. ($*$) On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.
[Pour le calcul de la somme on exprimera la somme partielle d'indice n de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(2n+1)^2}$ *en fonction des sommes partielles de* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^2}$ *en décomposant selon les termes d'indices pair et impair]*

Séries à termes positifs

Exercice 9. (♡) Étudier la convergence des séries de terme général

1) $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$

2) $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$

3) $u_n = \dfrac{n(\ln(n))^4}{(n+1)^3}$

4) $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

5) $u_n = \dfrac{n+1}{3^n}$

6) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

7) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{2^n}$

8) $u_n = \sin\left(\dfrac{2n+3}{4n^3+1}\right)$

9) $u_n = \dfrac{n^2}{(2n)!}$

10) $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 10. ($*$) Discuter selon les paramètres la nature des séries de terme général suivant :

1) $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ où $a \in \mathbb{R}$.

2) $u_n = \dfrac{1}{a^{\ln n}}$ $a > 0$

3) $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^a}$ où $a \in R$.

4) $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11. ($*$) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente. Montrer que les séries de terme général suivant sont convergentes.

1) u_n^2

2) $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$ [On pourra utiliser l'inégalité $xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ après l'avoir justifié]

Exercice 12. ($**$) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On suppose que $\sum v_n$ converge. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 13. ($*$)Règle de D'Alembert Soit (u_n) une suite strictement positive telle que: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

1) On suppose $l < 1$. Soit $k \in]l, 1[$, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait $u_{n+1} \leqslant k u_n$. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

2) On suppose $l > 1$. Montrer par une technique similaire que $\sum u_n$ diverge.

3) On suppose $l = 1$. Montrer à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut conclure en général.

Exercice 14. ($*$)Autre preuve de CV des séries de Riemann Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1) Montrer que, $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$.

2) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

Exercice 15. ($*$)Comparaison série intégrale

1) Soit $\alpha < 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

2) Soit $\alpha > 1$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Séries alternées

Exercice 16. ($*$) Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ dans les cas suivants

1) $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
2) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$
4) $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 17. ($**$) Étudier la convergence et la convergence absolue de la série $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k!}}$.

Divers

Exercice 18. ($*$)Constante d'Euler Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = H_n - \ln n$. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$.
2) En déduire qu'il existe une constante γ telle que : $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

Exercice 19. ($*$)Formule de Stirling On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n!}{n^n} \mathrm{e}^n$ et $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

1) Montrer que : $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \frac{1}{2n} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$.
2) En déduire la nature de la série $\sum(\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n))$.
3) En déduire que $n!$ à un équivalent de forme $C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
   On peut montrer que $C = \sqrt{2\pi}$. C'est la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 20. ($**$)Sommation des équivalents Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs définies à partir d'un rang N, telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.
On suppose : $u_n \sim v_n$.

1) Montrer que : $\sum_{k=N}^{n} u_k \sim \sum_{k=N}^{n} v_k$. *Utiliser la définition de la limite avec les ε.*
2) **Application 1.** Montrer que l'on retrouve alors le théorème de Cesaro.
3) **Application 2.** En déterminant un équivalent simple de $\ln(n+1) - \ln(n)$ retrouver que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.
4) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, montrer que ce sont les restes qui sont équivalents.