

XXVI. Groupe symétrique

- Permutation, notation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Groupe symétrique S_n .
- Support d'une permutation.
- Cycle, transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles, produit de transpositions.
- Signature d'une permutation.

XXVII. Déterminants

- Formes n -linéaires alternées. Antisymétrie, alternée : équivalence de ces notions. Proportionnalité des formes n -linéaires alternées.
- Déterminant d'une famille de vecteurs comme l'unique forme n -linéaire alternée valant 1 en une base. Interprétation comme aire/volume. Formule de changement de bases.
- Caractérisation des bases à l'aide du déterminant. Orientation des bases.
- Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes à l'aide du déterminant.
- Déterminant d'une matrice carrée. Formule : $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$.
- Caractérisation de l'inversibilité des matrices.

- Opérations sur les colonnes/lignes. Déterminant de la transposée.
- Méthode de calculs : matrice (2, 2), (3, 3) (Sarrus), matrice triangulaire, matrice par blocs. Cofacteurs. Développement par rapport à une ligne, une colonne.
- Déterminant de Vandermonde. Déterminant tridiagonale.
- Comatrice. Expression de l'inverse avec la comatrice.

XXIX. Entiers, dénombrement

- Ensembles finis. Injection, surjection, bijection et condition nécessaire de cardinal.
- Nombre d'injections, de bijections (permutations), $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.
- Opérations sur les cardinaux: réunion, produit cartésien, complémentaire. Lien avec les techniques de dénombrement : principe multiplicatif, disjonction de cas, passage par le contraire.
- p -listes, nombre de p -listes (ordre, répétition), de p -listes d'éléments distincts (ordre, pas de répétition).
- p -combinaisons (pas d'ordre pas de répétition), nombre de p -combinaisons.
- Les formules sur les coefficients binomiaux et les preuves combinatoires.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Preuve combinatoire de $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.
- Un déterminant tridiagonal menant à une suite à double récurrence linéaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Cahier de colles : groupes 9,10,11,12