# Chapitre
# Espaces euclidiens

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriels. Dans ce qui suit, $E$ désigne alors un tel $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

# I Espaces préhilbertiens

## I.1 Produit scalaire

**Définition (Produit scalaire)**

- **Produit scalaire**. On appelle **produit scalaire sur** $E$ toute forme **bilinéaire**, **symétrique**, **définie-positive** c'est-à-dire toute application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (\, x \,|\, y \,) \end{array}$ qui vérifie

  (i) **bilinéaire** :

  $$\forall (x, y, z) \in E^3,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \mu \varphi(y, z) \qquad \text{(linéarité à gauche)}$$

  $$\forall (x, y, z) \in E^3,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \varphi(x, y) + \mu \varphi(x, z) \qquad \text{(linéarité à droite).}$$

  (ii) **symétrique** : $\forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

  (iii) **définie** : $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

  (iv) **positive** : $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0.$

  Lorsque $E$ est muni d'un produit scalaire, on dit que $E$ est un **espace préhilbertien réel**.

- **Notation**. $\varphi$ est souvent noté $(\, \cdot \,|\, \cdot \,)$ ou $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ ou $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$.

- **Espace euclidien**. Un espace vectoriel **de dimension finie** muni d'un produit scalaire est appelé espace vectoriel euclidien.

**Exemples** **Produits scalaires usuels à connaître**

1) **Dans** $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ **ou** $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ **:**

$$\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\overrightarrow{\mathcal{P}})^2, \qquad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

2) **Dans** $\mathbb{R}^n$ **:**

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \qquad (\, x \,|\, y \,) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{où} \qquad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

3) **Dans** $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (où $a < b$) :

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}))^2, \qquad (\, f \,|\, g \,) = \int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

4) **Dans** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ **:**

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \qquad (\, A \,|\, B \,) = \mathrm{Tr}(A^\top B).$$

**Exercice.**

1) Montrer que l'application $((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' + x'y + xy' + yy'$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

**Remarques**

- La bilinéarité implique que $(\, x \,|\, 0_E \,) = (\, 0_E \,|\, x \,) = 0$ pour tout $x \in E$.
  Donc l'implication réciproque de la propriété "définie" est vraie : $x = 0_E \Rightarrow (\, x \,|\, x \,) = 0$.
- Bien noter que : "symétrie" + "linéarité à gauche" $\Rightarrow$ " bilinéarité".
  Conséquence : en pratique, pour montrer la bilinéarité, on prouve d'abord la symétrie, puis la linéarité à gauche. La bilinéarité en découle.

## I.2 Norme

**Définition (Norme)**

- La **norme euclidienne** sur $E$ associée au produit scalaire $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ est l'application

$$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{(\, x \,|\, x \,)} \end{array}.$$

- La **distance euclidienne** sur $E$ associée au produit scalaire $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ est l'application

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}.$$

**Exemples** **Norme euclidienne associée au produit scalaire usuel**

1) **Dans** $\mathbb{R}^n$ **:**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{où} \qquad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

2) **Dans** $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ **:**

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \qquad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

3) **Dans** $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ **:**

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad \|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}.$$

**Théorème (Inégalités et égalités fondamentales)**

Soit $E$ un espace préhilbertien muni du ps $(\cdot\,|\,\cdot)$.

1) **Homogénéité** :
$$\forall x \in E, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

2) **Séparation** :
$$\forall x \in E, \qquad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E.$$

3) **Inégalité de Cauchy-Schwarz** :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad |\,(\,x\,|\,y\,)\,| \leqslant \|x\|\|y\|$$
avec égalité si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires.

4) **Inégalité triangulaire** :
$$\forall (x,y,z) \in E^3, \qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad\qquad d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$$
avec égalité dans le premier cas si et seulement si $x$ et $y$ sont colinéaires de même sens.

5) **Inégalité triangulaire renversée** :
$$\forall (x,y,z) \in E^3, \qquad |\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x-y\| \qquad\qquad |d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z).$$

6) **Identité du parallélogramme** :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

7) **Identités de polarisation** :
$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad (\,x\,|\,y\,) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

☞ **Explication** ☜ Interprétation géométrique.

Inégalité triangulaire

Identité du parallélogramme

**Remarques**

1) **Sur les normes**. Une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une norme sur $E$ si
   - $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E \quad$ (séparation).
   - $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad$ (homogénéité)
   - $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y) \quad$ (inégalité triangulaire).
2) **Sur la polarisation**. Les identités de polarisation permettent d'exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme euclidienne.

**Exercice.**

1) Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produit scalaires usuels dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
2) Montrer que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

# II Orthogonalité

## II.1 Définitions

**Définition (Orthogonalité et vecteurs)**

Soit $(E, (\cdot \,|\, \cdot))$ un espace préhilbertien réel.

- Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que $x$ et $y$ sont **orthogonaux**, que l'on note $x \perp y$, si $(\, x \,|\, y \,) = 0$.
- Soit $x \in E$. $x$ est dit unitaire ou normé si $\|x\| = 1$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire.
- La famille de vecteurs de $E$, $(x_i)_{i \in I}$, est une **famille orthogonale** si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire :
  $$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow (\, x_i \,|\, x_j \,) = 0.$$
- La famille de vecteurs de $E$, $(x_i)_{i \in I}$, est une **famille orthonormale** si la famille est orthogonale et constituée de vecteurs unitaires, c'est-à-dire :
  $$\forall (i, j) \in I^2, \quad (\, x_i \,|\, x_j \,) = \delta_{ij}.$$
- Si $E$ est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$.
  $\mathcal{B}$ est une **base orthogonale/orthonormale** si $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale/orthonormale

**Exemples**

1) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel :
   - $(1, 3, 2)$ et $(1, -1, 1)$ sont orthogonaux
   - la base canonique $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base orthonormale
2) Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique est une base orthonormale.
3) On reprend le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, $(\, (x, y) \,|\, (x', y') \,) = 2xx' + xy' + x'y + yy'$. Alors, pour ce produit scalaire, $(1, 0) \perp (-1, 2)$ car : .
4) Sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(\, P \,|\, Q \,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $X \perp X^2$, car :$(1, X, X^2)$ est-elle une base orthonormale pour ce produit scalaire ?

5) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique est une base orthonormale.

⚠ **Attention** ⚠ Deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour un produit scalaire sans l'être pour un autre produit scalaire.

**Exercice.**

1) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, trouver les vecteurs orthogonaux à $(1, 2, 3)$.

2) Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, trouver les matrices orthogonales à $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Théorème (de Pythagore)**

Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel.

1) Soient $x$ et $y$ deux vecteurs $E$ alors : $\quad x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2) Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale alors : $\quad \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

**Théorème (Liberté d'une famille orthogonale)**

Soit $(E, (\cdot \mid \cdot))$ un espace préhilbertien réel. Une famille orthogonale de vecteurs $\boxed{\text{non nuls}}$ est libre.
**Conséquence :** une famille orthonormale est libre.

**Théorème (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**

Soit $E$ un espace préhilbertien réel. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de $E$.
Il existe une famille orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ de $E$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k).$$

Elle se calcule par récurrence:

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} \\ u_{k+1} = \dfrac{e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\, u_i \mid e_{k+1} \,)\, u_i}{\left\| e_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (\, u_i \mid e_{k+1} \,)\, u_i \right\|} \end{cases}.$$

**✎ Méthode pratique ✎ (Déterminer une base orthonormale)**

Pour construire une bon de $F$ sev de $E$ de dimension finie.

- On détermine une base de $F$.
- On l'orthonormalise avec le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Les trois premiers vecteurs sont :

$u_1 =$ $u_2 =$ $u_3 =$

**Corollaire (Existence d'une base orthonormale)**

Tout espace euclidien différent de $\{0_E\}$ possède une base orthonormale.

**Exercice.**

1) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthonormée du plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/ 2x - y + z = 0\}$.

2) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(\, P \mid Q \,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

**Théorème (Théorème de la base orthonormée incomplète)**

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien $E$ peut être complétée en une base orthonormée de $E$.

**Théorème (Coordonnées, produit scalaire dans une base orthonormale)**

Soit $E$ un espace euclidien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $E$.

1) **Coordonnés dans une bon.** Soit $x \in E$, alors : $\displaystyle x = \sum_{k=1}^{n} (\, x \mid e_k \,)\, e_k.$

   Les coordonnées de $x$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont dinc $((\, x \mid e_1 \,), \ldots, (\, x \mid e_n \,))$.

2) **Expression du produit scalaire dans une bon.**

   Soit $(x, y) \in E^2$ avec $\displaystyle x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $\displaystyle y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Alors:

$$(\, x \mid y \,) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

3) **Matriciellement**, si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ alors $(\, x \mid y \,) = X^\top Y$ et $\|x\| = \sqrt{X^\top X}$.

⚠ **Attention** ⚠ Ces formules sont fausses quand la base n'est pas orthonormale.

**Exercice.**

1) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(\, P \mid Q \,) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer les coordonnées de $X^2 - 2X + 3$ dans la base orthonormée trouvée plus haut.

## II.2 Sous-espaces vectoriels et orthogonalité

**Définition (Sous-espace vectoriel et orthogonalité)**

Soient $E$ un espace préhilbertien et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

- Soit $u \in E$. On dit que $u$ **est orthogonal à** $F$, noté $u \perp F$ si **tout vecteur** de $F$ est orthogonal à $u$ i.e.
$$\forall v \in F, \ (u \mid v) = 0.$$
- On dit que $F$ **et** $G$ **sont orthogonaux**, noté $F \perp G$, si **tout vecteur** de $F$ est orthogonal à **tout vecteur** de $G$ i.e.
$$\forall u \in F, \ \forall v \in G, \ (u \mid v) = 0.$$

**Exemples**

1) $\{0_E\} \perp F$, pour tout $F$ sous-espace vectoriel de $E$.
2) Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel :
   - $\mathbb{R} \times \{0\} \perp \{0\} \times \mathbb{R}$
   - donner un sous-espace vectoriel orthogonal à $F$ d'équation $2x - 5y = 0$.
3) Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, soient $F = \{(x, y, z) \in x - 2y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((-1, 2, -1))$. Montrer que $F \perp G$.

**Théorème (CNS d'orthogonalité à l'aide d'une famille génératrice)**

Soit $E$ un espace préhilbertien.
Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ de familles génératrices respectives $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e'_1, \ldots, e'_q)$ et soit $u$ un vecteur de $E$.

- $$u \perp F \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \quad (u \mid e_i) = 0.$$
- $$F \perp G \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \forall j \in [\![1, q]\!], \quad \left(e_i \mid e'_j\right) = 0.$$

**NB:** les familles génératrices $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(e'_1, \ldots, e'_q)$ ne sont pas forcément des bases.

**Définition (Orthogonal d'une partie de $E$)**

Soit $E$ un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Soit $A$ une partie non vide de $E$.
L'ensemble, noté $A^\perp$, appelé **orthogonal de** $A$ est l'ensemble de tous les vecteurs de $E$ orthogonaux à $A$ i.e.
$$A^\perp = \{u \in E \,/\, u \perp A\} = \{u \in E \,/\, \forall v \in A, \ (v \mid u) = 0\}.$$

**Remarques**

Si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$ : $\qquad A \perp B \Leftrightarrow A \subset B^\perp$.

**Théorème (Propriétés de l'orthogonal d'une partie)**

Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$ et $u \in E$ non nul.

1) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$ orthogonal à $A$.
2) $u^\perp$ est un hyperplan de $E$.
3) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
4) $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
5) $A \subset (A^\perp)^\perp$.

**Théorème (Orthogonal d'un s.e.v.)**

Soit $E$ un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

1) $F^\perp$ et $F$ sont en somme directe.
2) $\boxed{\textbf{Si } F \textbf{ est de dimension finie}}$ : $F^\perp$ est un supplémentaire de $F$ dans $E$ orthogonal à $F$, qui vérifie donc

$$F \perp F^\perp \qquad F \oplus F^\perp = E \quad \text{noté aussi} \quad F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E.$$

$\boxed{\textbf{Si } E \textbf{ est de dimension finie}}$ alors

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F \qquad \left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

**Exemples**

1) Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$. Déterminer $F^\perp$ et $(3, 4)^\perp$.
2) **A connaître** : soit $E$ un espace vectoriel préhilbertien.

$$\{0_E\}^\perp = \qquad\qquad E^\perp =$$

3) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ on pose $F = \text{Vect}(X)$. Déterminer $F^\perp$.

**✎ Méthode pratique ✎ (Déterminer l'orthogonal d'un sev de dimension finie)**

On cherche à déterminer $F^\perp$.
Si l'on connaît une **famille génératrice** $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de $F$, alors

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], \quad (x|\varepsilon_k) = 0.$$

Ce qui ramène à la résolution d'un système de $p$ équations.

**Remarques (Cas des hyperplans)**

- **Caractérisation des hyperplans**. Si $H$ est une partie d'un espace euclidien alors $H$ est un hyperplan si et seulement s'il existe un vecteur non nul tel que $H = u^\perp$.
  $u$ est appelé **vecteur normal** du plan.
- **Lecture d'un vecteur normal sur une équation**. Si dans une bon $H$ admet pour équation $a_1x_1 + \cdots a_nx_n = 0$ alors $u$ de coordonnées $(a_1, \dots, a_n)$ dans cette bon est un vecteur normal à $A$.

### II.3 Projecteurs orthogonaux

**Définition (Projecteurs othogonaux)**

Soient $E$ un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, **de dimension finie**.
Dans ce cas $F$ et $F^\perp$ sont supplémentaires dans $E$, et on appelle projection orthogonale (ou projecteur orthogonal) sur $F$, la projection sur $F$ parallèlement à $F^\perp$ :

$$p_F : \begin{array}{ccc} E = F \oplus F^\perp & \to & E \\ u = u_F + u_{F^\perp} & \mapsto & p_F(u) = u_F \end{array}.$$

**Rappel de quelques propriétés d'algèbre linéaire :**

**Théorème (Caractérisation d'un projecteur orthogonal)**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Soit $p$ un projecteur de $E$.
Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$.

**Exercice.** Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $p$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal.

**Théorème (Expression de la projection dans une $\boxed{\textbf{b.o.n.}}$)**

Soient $E$ un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une $\boxed{\textbf{b.o.n.}}$ de $F$. Soit $p_F$ la projection orthogonale sur $F$.

- **Expression de la projection dans une bon** :

  pour tout $u \in E$, $\boxed{p_F(u) = \sum_{k=1}^{n} (u \,|\, e_k)\, e_k}$ $\quad \|p_F(u)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (u \,|\, e_k)^2.$

- **Inégalité de Bessel** : pour tout $u \in E$, $\|p_F(u)\| \leqslant \|u\|$.

**Remarques (Lien avec le procédé de Gram-Schmidt)**

Dans le procédé de Gram-Schmidt, remarquez que le vecteur obtenu à l'étape $p+1$ avant normalisation est $e_{p+1}$ moins le projeté orthogonal de $e_{p+1}$ sur $\operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ :

$$e_{p+1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{p} (e_{p+1}|u_i) u_i}_{p_{\operatorname{Vect}(u_1,\ldots,u_p)}(e_{p+1})}.$$

**✎ Méthode pratique ✎ (Déterminer l'expression du projeté orthogonal)**

On veut déterminer l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur $u$ de $E$ sur $F$ de dimension finie.

- **Méthode 1** : on détermine une bon $(e_1, \dots, e_n)$ de $F$ (**forcément orthonormale**), et on utilise l'expression du projeté orthogonal du théorème ci-dessus : $p_F(u) = \sum_{k=1}^{n} (\, u \mid e_k \,) \, e_k$.
- **Méthode 2** : on détermine une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $F$ (**pas forcément orthonormale**), et on caractérise $p_F(u)$ par l'orthogonalité de $u - p_F(u)$ aux vecteurs de la base de $F$ (posée au début) :

$$u - F(u) \perp F \Leftrightarrow \begin{cases} u - p_F(u) \perp e_1 \\ \dots \\ u - p_F(u) \perp e_1 \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} (\, u - p_F(u) \mid e_1 \,) = 0 \\ \dots \\ (\, u - p_F(u) \mid e_n \,) = 0 \end{cases}.$$

  Ce qui mène souvent à un système de $n$ équations dont les $n$ inconnues sont les coordonnées de $p_F(u)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

**Exercice.**

1) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la projection orthogonale de $u = (1, 2, 3)$ sur $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$.
   Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $F$.
2) **A retenir**. Soit $E$ un espace préhilbertien et $u$ un vecteur non nul.
   -a- Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur la droite $\mathrm{Vect}(a)$.
   -b- Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur l'hyperplan $(\mathrm{Vect}(a))^\perp$.
3) Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P \cdot Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t$. Déterminer le projeté orthogonal de $X^3$ sur $\mathbb{R}_2[X]$.

**Théorème-Définition (Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie)**

Soient $E$ un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de **dimension finie** et $u \in E$.

- On appelle **distance de** $u$ **à** $F$, notée $d(u, F)$ le réel :

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

- Si $p_F$ désigne la projection orthogonale sur $F$, alors $p_F(u)$ est l'unique vecteur $v_0 \in F$ tel que

$$\|u_0 - v\| = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

- **Conséquences :**

$$d(u, F) = \|u - p_F(u)\| \qquad d^2(u, F) = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2.$$

**Exercice.** Retour à l'exercice précédent.

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 2, 3)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$. Calculer la distance de $u$ à $F$.
2) Dans $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $(P \cdot Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t$. Calculer la distance de $X^3$ à $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Un grand classique. Déterminer les valeurs de $(a, b, c)$ telles que $\int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \, \mathrm{d}t$ est minimale.