Exercice 1. (♡) Soit E un ensemble fini et $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$. Montrer la formule dite "du crible"

$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B + \mathrm{Card}\, C - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 2. (♡) Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20:

- 8 boules blanches numérotées de 1 à 8
- 12 boules noires numérotées de 9 à 20.

1) On tire simultanément 5 boules de l'urne. Combien y a-t-il:
   -a- de tirages possibles?
   -b- tirage donnant au moins une boule noire?
   -c- de tirage ne donnant que des numéros pairs?
   -d- tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires?
2) On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise. Mêmes questions.
3) On tire successivement 5 boules de l'urne avec remise. Mêmes questions.

Exercice 3. (♡) Combien y a t-il de mains de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes:

1) au total
2) avec exactement un as
3) avec exactement un as et un roi
4) avec au moins un as
5) avec au moins un as et au moins un roi
6) avec exactement un as et un trèfle.

Exercice 4. (♡) On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite. Déterminer:

1) le nombre de résultats possibles
2) le nombre de résultats avec exactement un multiple de 3
3) le nombre de résultats avec au moins un multiple de 3
4) le nombre de résultats avec au plus trois multiples de 3.
5) le nombre de résultats où apparaissent exactement 2 fois le même chiffre
6) le nombre de résultats où apparaissent au moins 2 fois le même chiffre

Exercice 5. (♡) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot ABRACADABRA (du dictionnaire ou non).

Exercice 6. Principe des tiroirs et des chaussettes.

1) 501 entiers sont choisis parmi les entiers de 1 à 1000. Montrer qu'il existe toujours au moins un couple de nombres tels que l'un des termes divise l'autre. *On pourra écrire les entiers sous forme $2^p k$ où k est impair.*
2) Montrer que parmi 101 entiers distincts, il existe toujours 11 d'entre eux dont la somme est divisible par 11. *On pourra s'intéresser aux ensembles E_i qui contiennent les entiers parmi les 101 choisis qui ont un reste égal à i modulo 11.*

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les couples (x, y)

1) dans $[\![1, n]\!]^2$ tels que $x + y = n$
2) dans $[\![1, n]\!]^2$ tels que $x < y$
3) dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, 2n]\!]$ tels que $x < y$
4) dans $[\![1, n]\!]^2$ tels que $|x - y| \leqslant 1$.

Exercice 8. $(*)$ Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n sommets (où $n \geqslant 3$).

Exercice 9. $(*)$ Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de l'intervalle $[\![1,p]\!]$ vers l'intervalle $[\![1,n]\!]$.

Exercice 10. $(*)$Formule de Vandermonde
Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant a+b$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{a}{p}\binom{b}{n-p} = \binom{a+b}{n}$

Exercice 11. $(*)$Formule de Pascal
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1,n]\!]$.

1) Quelles sont les valeurs possibles du maximum d'une $p+1$-combinaison de $[\![1,n+1]\!]$?
2) En utilisant ce qui précède, compter de deux manières les $p+1$-combinaison de $[\![1,n+1]\!]$ pour en déduire une formule.

Exercice 12. $(**)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre N_n de parties de $[\![1,2n]\!]$ contenant autant de nombres pairs que de nombres impairs.

Exercice 13. $(**)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre P_n de partition de $[\![1,2n]\!]$ en parties de 2 éléments.
Par exemple pour $n=3$, $\{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\}$ est une partition qui convient.

Exercice 14. $(*)$Nombre de relations Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.

1) Dénombrer les relations binaires sur E.
2) Dénombrer les relations binaires, réflexives sur E.
3) Dénombrer les relations binaires, réflexives et symétriques sur E.

Exercice 15. $(*)$-$(**)$Nombre de surjections

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   -a- Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.
   -b- Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n+2]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,1,2\}$.

Exercice 16. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note N_n le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$. En déduire l'expression de G_n.

Exercice 17. $(*)$ Déterminer le nombre d'entiers compris entre 1 et 10^k dont la somme des chiffres est inférieure ou égale à 2.

Exercice 18. $(**)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$.

1) De combien de façons peut-on répartir p chemises identiques dans n tiroirs?
2) Quel est le cardinal de l'ensemble $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n \,/\, x_1+\dots+x_n = p\}$?.

Exercice 19. $(**)$ Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X = n2^{n-1}$.

Exercice 20. $(**)$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments.
Dénombrer les couples $(X,Y) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $X \subset Y$.