Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 1. (♡) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 2. (∗) Soit f une fonction continue strictement positive sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2.$$

Étudier les cas d'égalité.

Des produits scalaires

Exercice 3. (♡) Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, on pose $(P|Q) = \widetilde{P}(0)\widetilde{Q}(0) + \widetilde{P}(1)\widetilde{Q}(1) + \widetilde{P}(2)\widetilde{Q}(2)$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2) On pose les polynômes de Lagrange:

$$P_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} \qquad P_1 = \frac{X(X-2)}{(1-0)(1-2)} \qquad P_2 = \frac{X(X-1)}{(2-0)(2-1)}$$

Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.
3) Déterminer les coordonnées d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ dans cette base.

Exercice 4. (∗)Généralisation de l'exercice 3
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et les $n+1$ réels $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \widetilde{P}(x_i)\widetilde{Q}(x_i)$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Pour $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_j = \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{X - x_k}{x_j - x_k}$ (polynômes de Lagrange).
3) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
4) Déterminer les coordonnées d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 5. (♡) Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ on définit l'application $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ par:
$(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout $(P, Q) \in E^2$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.
2) On pose $F = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$.
   -a- Construire une base orthonormale de F pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
   -b- Donner l'expression du projeté orthogonal du polynôme X^3 sur F.

Exercice 6. $(*)$ On définit l'application φ par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})Q(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire φ.

Exercice 7. $(*)$Polynômes orthogonaux
Soient a et b deux réeels tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}$.
Soit ω une fonction continue sur $[a, b]$, non nulle, à valeurs positives.

1) Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & (P|Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle qu'on ait les trois conditions suivantes satisfaites :
   - (C_1) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est de degré k.
   - (C_2) pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est de coeffcient dominant 1
   - (C_3) la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}0$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8. $(*)$ Soit E un espace préhilbertien et $a \in E$ un vecteur unitaire.
On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x|y) + k(a|x)(a|y) \end{array}$.
Montrer que φ est un produit scalaire si et seulement si $k > -1$.

Projection

Exercice 9. $(\heartsuit)$ $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire usuel. On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0 \text{ et } y + t = 0\}$.

1) Déterminer une base orthonormale de F et $F^\perp$. **En déduire** une bon de $\mathbb{R}^4$.

2) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

3) En déduire la matrice de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

4) Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, -1, 1, 2)$.

Exercice 10. $(\heartsuit)$ Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit u un vecteur unitaire de E, on pose $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u)$.

1) Montrer que la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ est $UU^\top$ où $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

2) En déduire la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de la projection orthogonale sur $\mathcal{P} = D^\perp$.

3) Application: dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $2x - y - 2z = 0$.

Exercice 11. $(*)$ Calculer le minimum de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a,b) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{e}^t - (a + b\sin t))^2\,\mathrm{d}t.$

Exercice 12. $(*)$ On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $(A|B) = \mathrm{Trace}(A^\top B)$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.

2) Déterminer la projection orthogonale d'une matrice A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le minimum des ensembles suivants :

$$U = \left\{ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2 \ / \ M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \right\} \qquad V = \left\{ \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{ij} - m_{ij})^2 \ / \ M = (m_{ij}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

4) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Trace}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{Trace}(A^\top A)}$.

5) On se place dans le cas $n = 2$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $d(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$ et $d(A, \mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$.

Exercices théoriques

Exercice 13. $(**)$ Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.
Soient x et y deux vecteurs distincts tels que $(x|y) = \|y\|^2$.
Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = p_H(x)$ où p_H est la projection orthogonale sur H.

Exercice 14. $(**)$ Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tels que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \|e_i\| = 1 \qquad \forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale de E puis que c'est une base orthonormale.

Exercice 15. $(*)$ Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x)|y) = (x|f(y))$. On dit que f est un endomorphisme symétrique.

1) Montrer que la matrice de f dans une base orthonormale est symétrique.

2) Montrer que $\mathrm{Im}\, f = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

3) Montrer qu'une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique.

Exercice 16. $(*)$ Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, f = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

Exercice 17. $(**)$Déterminant de Gram
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.
On note $G(x_1, \dots, x_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $G(x_1, \dots, x_n) = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1) Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée alors $\det G(x_1, \dots, x_n) = 0$.

2) On suppose maintenant que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre et on pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

   -a- On pose $\mathcal{B}$ une base orthonormale de F et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.
   Exprimer $G(x_1, \dots, x_n)$ à l'aide M et $M^\top$.

   -b- Montrer que $\det(G(x_1, \dots, x_n) > 0$.

3) Déduire que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si et seulement si $\det G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

4) Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, F) = \sqrt{\dfrac{\det G(x, x_1, \dots, x_n)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}}$.