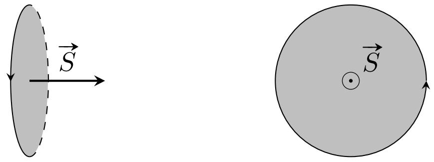
I Lois de l'induction

1 Flux du champ magnétique à travers une surface

Le flux d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ à travers une surface orientée est $\boxed{\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}}$
où $\vec{S}$ est le vecteur surface,

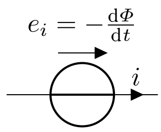
- orthogonal à la surface
- de norme S l'aire de la surface
- orienté en fonction du sens d'orientation choisi pour le contour de la surface (donc en fonction du sens de l'intensité i), selon la règle du tire-bouchon.



Dans le cas d'un champ magnétique non uniforme, $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

2 Loi de Faraday

Un circuit électrique dans un champ magnétique est le siège d'une force électromotrice induite $\boxed{e_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}$, en convention générateur, où $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$ est le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit.



3 Loi de modération de Lenz

La présence du signe « - » dans la loi de Faraday rend compte du fait que le sens du courant induit est tel que celui-ci tend toujours à s'opposer, par ses effets, à la cause qui l'a produit :

- dans le cas d'un champ magnétique variable, le champ créé par le courant induit lui-même s'oppose à la variation du champ initial
- dans le cas d'un circuit mobile, les forces de Laplace dues au courant induit s'opposent au mouvement initial du circuit

Cette interprétation est connue sous le nom de loi de modération de Lenz.

II Autoinduction

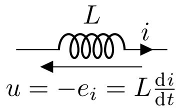
1 Flux propre

Le flux propre d'un circuit électrique est le flux du champ magnétique $\vec{B}_p$ créé par ce circuit, à travers lui-même. Comme $\vec{B}_p$ est proportionnel à l'intensité i dans le circuit, le flux propre est proportionnel à i, soit

$$\boxed{\Phi_p = \vec{B}_p \cdot \vec{S} = Li}$$

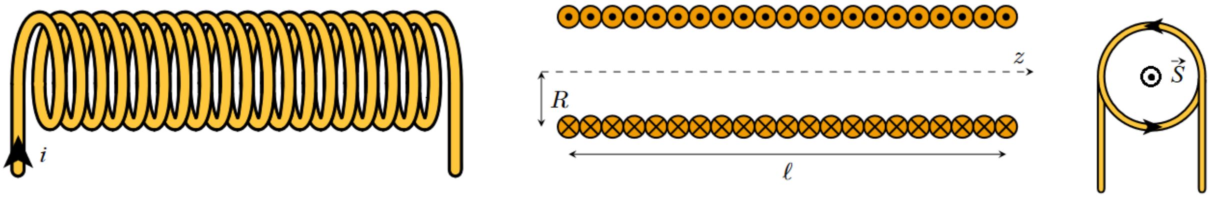
où $L(>0)$ est l'**inductance propre** du circuit.

D'après la loi de Faraday, lorsque l'intensité i d'un circuit varie, celui-ci est le siège d'une force électromotrice autoinduite : $e_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_p}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ en convention générateur, c'est-à-dire $\boxed{u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\text{, en convention récepteur}}$.
On retrouve ainsi la loi de comportement d'une inductance.



2 Inductance propre d'une bobine de grande longueur

On considère un solénoïde (bobine circulaire de grande longueur) d'axe Oz, de longueur ℓ, de rayon $R \ll \ell$ et constitués de N spires.



Le champ magnétique créé par le solénoïde à l'intérieur de lui-même est approximativement donné par le champ à l'intérieur d'un solénoïde infini : $\vec{B}_p = \mu_0 n i \vec{u}_z$, où n est la densité linéique de spires, soit $n = \frac{N}{\ell}$ et μ_0 une constante.
Le flux à travers une spire est $\vec{B}_p \cdot \vec{S}$, avec $\vec{S} = \pi R^2 \vec{u}_z$ le vecteur surface d'une spire.
Le flux propre à travers le solénoïde complet est

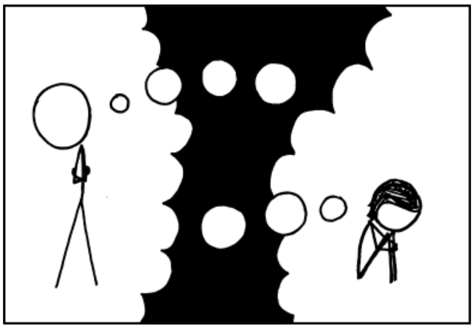
$$\Phi_p = N\vec{B}_p \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell} i$$

On identifie l'inductance propre L du solénoïde telle que $\Phi_p = Li$, soit [1]

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}$$

1. On en déduit l'unité SI de la perméabilité du vide μ_0 : H.m^{-1}.

III Induction mutuelle



1 Circuits électriques couplés par induction mutuelle

Dans le cas de deux circuits en interaction,

— le champ magnétique au niveau du circuit 1 est la somme du champ magnétique propre du circuit 1 et du champ magnétique créé par le circuit 2, soit $\vec{B} = \vec{B}_{p1} + \vec{B}_2$

— le champ magnétique au niveau du circuit 2 est la somme du champ magnétique propre du circuit 2 et du champ magnétique créé par le circuit 1, soit $\vec{B} = \vec{B}_{p2} + \vec{B}_1$

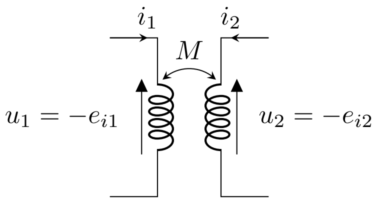
Par conséquent, le flux du champ magnétique à travers le circuit 1 est $\Phi_1 = \underbrace{\Phi_{p1}}_{L_1 i_1} + \Phi_{2\to 1}$.

Comme $\vec{B}_2$ est proportionnel à i_2, $\Phi_{2\to1}$ est proportionnel à i_2, soit $\Phi_{2\to1} = M_{21} i_2$.
De même, le flux du champ magnétique à travers le circuit 2 est $\Phi_2 = \underbrace{\Phi_{p2}}_{L_2 i_2} + \underbrace{\Phi_{1\to2}}_{M_{12} i_1}$.

On peut montrer que $\boxed{M_{12} = M_{21} = M}$, l'**inductance mutuelle** des circuits 1 et 2.

D'après la loi de Faraday, le circuit 1 est le siège d'une force électromotrice $e_{i1} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$, en convention générateur. De même, $e_{i2} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$, en convention générateur.

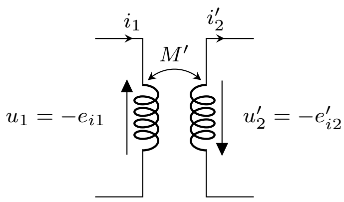
Le schéma électrique de deux circuits couplés par induction mutuelle est :



En convention récepteur, on a $\boxed{\begin{cases} u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}}$

Attention, le signe de M dépend des choix d'orientation de i_1 et i_2.[2]

2. On considère un changement d'orientation du circuit 2, soit $i'_2 = -i_2$ et $u'_2 = -u_2$. On note M' la nouvelle inductance mutuelle.



On a alors $\begin{cases} u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M'\frac{\mathrm{d}i'_2}{\mathrm{d}t} \\ u'_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i'_2}{\mathrm{d}t} + M'\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$, c'est-à-dire $\begin{cases} u_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M'\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M'\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$
On identifie ainsi $M' = -M$.

2 Bilan énergétique

En multipliant u_1 par i_1 et u_2 par i_2, on a $\begin{cases} u_1 i_1 = L_1 i_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M i_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 i_2 = L_2 i_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M i_2 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

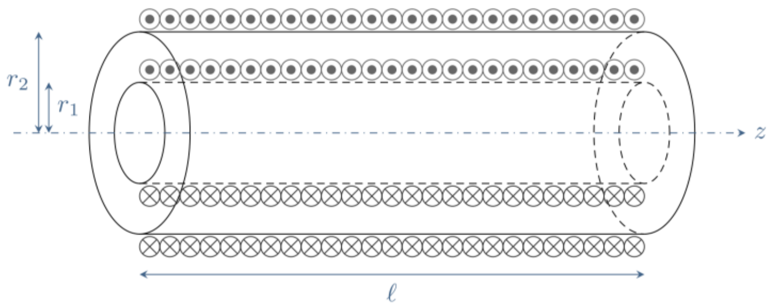
On en déduit

$$\begin{aligned} u_1 i_1 + u_2 i_2 &= L_1 i_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 i_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\left(i_1 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right) \end{aligned}$$

On définit $\boxed{E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$ l'énergie magnétique emmagasinée dans les 2 circuits couplés.

3 Inductance mutuelle de 2 solénoïdes imbriqués

On considère 2 solénoïdes de même axe Oz, de longueur ℓ, de rayons $r_1 < r_2 \ll \ell$ et constitués respectivement de N_1 et N_2 spires.



Le champ magnétique créé par le solénoïde 2 à l'intérieur de celui-ci est approximativement donné par le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini : $\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2 \vec{u}_z$

Le flux de ce champ magnétique à travers les N_1 spires du solénoïde 1 est : $\Phi_{2\to1} = N_1 \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1$ où $\vec{S}_1 = \pi r_1^2 \vec{u}_z$ est le vecteur surface d'une spire, soit $\Phi_{2\to1} = N_1 \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2 \pi r_1^2$

On identifie l'inductance mutuelle des 2 solénoïdes telle que $\Phi_{2\to1} = M i_2$:[3]

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_1^2}{\ell}$$

Cas de deux circuits en influence totale

Deux circuits sont dits en influence totale lorsque l'intégralité des lignes de champ créées par l'un traverse l'autre et réciproquement. Les solénoïdes précédents sont en influence totale pour $r_1 = r_2 = R$. On a alors :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 \pi R^2}{\ell} \qquad L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 \pi R^2}{\ell} \qquad M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R^2}{\ell}$$

Ainsi, $\boxed{M^2 = L_1 L_2}$

3. On obtient le même résultat en considérant le flux du champ magnétique créé par le solénoïde 1, à travers le solénoïde 2. En effet, le champ magnétique créé par un solénoïde infini à l'extérieur de celui-ci est nul. Par conséquent, le champ magnétique $\vec{B}_1$ n'est pas uniforme sur toute la surface $\vec{S}_2$ d'un spire du solénoïde 2 :

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \vec{u}_z \text{ pour } r < r_1 \\ \vec{0} \text{ pour } r > r_1 \end{cases}$$

Le flux de ce champ magnétique à travers les N_2 spires du solénoïde 2 est :

$$\begin{aligned} \Phi_{1\to2} &= N_2 \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 \\ &= N_2 \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_1 \\ &= N_2 \mu_0 \frac{N_1}{\ell} i_1 \pi r_1^2 \end{aligned}$$

On retrouve bien $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi r_1^2}{\ell}$