DS n° 7 de Physique-Chimie

Durée : 3h
Calculatrice autorisée

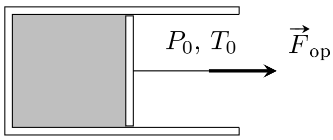
1 Transformations d'un gaz parfait

Données :

— Constante des gaz parfaits : $R = 8,31$ J.K^{-1}.mol^{-1}
— Masse molaire de l'oxygène : $M_O = 16$ g/mol

1. Définir la vitesse quadratique moyenne. Calculer la vitesse quadratique moyenne d'une molécule de dioxygène dans l'air à température ambiante.
2. Établir les expressions des capacités thermiques à volume constant et à pression constante C_V et C_P d'un gaz parfait, en fonction de n, R et γ.

On considère un gaz parfait, d'indice adiabatique γ, dans un cylindre fermé par un piston pouvant coulisser sans frottements. Le gaz est initialement à l'équilibre avec l'extérieur à la température T_0 et à la pression P_0. Le volume initial vaut V_0.



Un opérateur tire progressivement sur le piston pour amener lentement le volume du cylindre à $2V_0$.

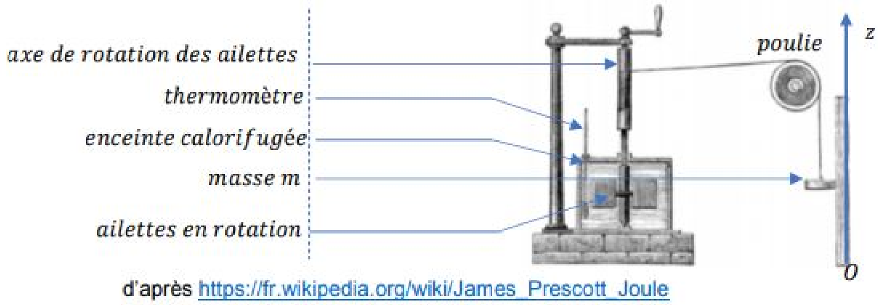
3. Justifier qu'on peut modéliser la transformation par une transformation isotherme.
4. Établir l'expression de la pression finale P_1 dans le cylindre en fonction de P_0.
5. Calculer le transfert thermique Q recu par le gaz au cours de la transformation, en fonction de P_0 et V_0. Dans quel sens se fait le transfert thermique ?

Partant de l'état final précédent, l'opérateur relâche brusquement le piston.

6. Justifier qu'on peut modéliser la transformation par une transformation adiabatique.
7. Établir les expressions de la température finale T_2 et du volume final V_2 en fonction de T_0, V_0 et γ.
8. Comparer T_2 avec T_0, et V_2 avec V_0.

2 Expérience de Joule

En 1843, James Prescott Joule proposa une expérience permettant de mesurer l'équivalent mécanique du transfert thermique. Cette expérience est décrite de manière simplifiée ci-dessous.



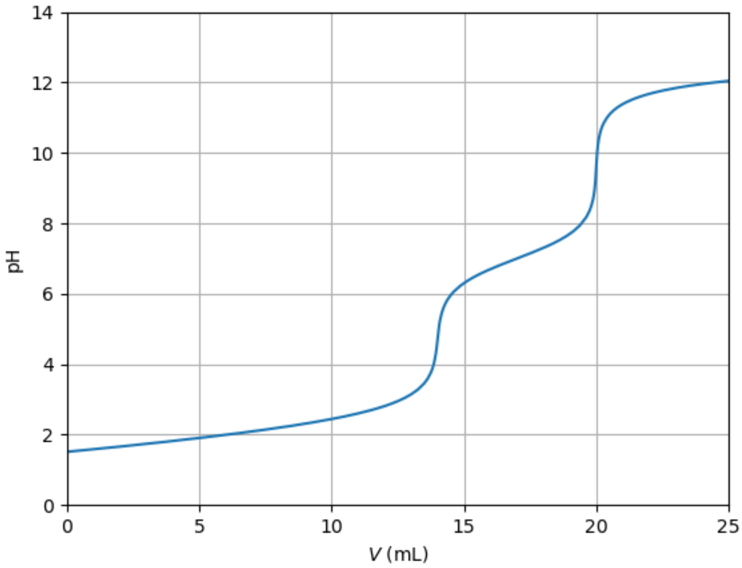
d'après https://fr.wikipedia.org/wiki/James_Prescott_Joule

Une masse $m = 30$ kg, initialement immobile à une hauteur $h = 2$ m, entraine la rotation d'ailettes lors de son mouvement de chute. Ce mouvement de translation de la masse m est converti en mouvement de rotation à l'aide d'un fil inextensible, encastré dans une poulie et enroulé autour de l'axe de rotation des ailettes. Les ailettes sont dans une enceinte supposée calorifugée et remplie d'eau (l'eau est supposée être initialement au repos). La température T de la masse d'eau présente dans l'enceinte est mesurée à l'aide d'un thermomètre. On néglige tous les frottements sauf ceux associés à la viscosité de l'eau présente dans le calorimètre. On suppose en outre que ces frottements sont suffisamment importants, pour qu'on puisse négliger l'énergie cinétique des ailettes et de la masse. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre (avec $g = 10$ m.s^{-2}).
Le travail des forces de viscosité de l'eau est à l'origine d'une augmentation de la température T. La capacité thermique de l'ensemble du calorimètre (eau, ailettes et enceinte) vaut $C = 20$ kJ/K. J.P. Joule effectue le mouvement de chute de la masse m sur une hauteur h et mesure la variation de température ΔT.

9. Estimer la variation de température ΔT mesurée par J.P. Joule, en précisant bien le système considéré. Commenter.

3 Titrage d'un mélange d'acides sulfurique et sulfureux

Par dissolution d'un gaz contenant à la fois du dioxyde de soufre et du trioxyde de soufre, on obtient une solution aqueuse contenant un mélange d'acide sulfurique H_2SO_4 (de concentration c_1) et d'acide sulfureux H_2SO_3 (de concentration c_2). On titre un volume $V_0 = 20,0$ mL de cette solution par de la soude de concentration $c = 0,100$ mol/L. On note V le volume de soude versé.



Données :

- L'acide sulfurique H_2SO_4 est un acide fort.
- Couple ion hydrogénosulfate $HSO_4{}^-$ / ion sulfate $SO_4{}^{2-}$: $\mathrm{p}K_{a1} = 1,9$
- Couple acide sulfureux H_2SO_3 / ion hydrogénosulfite $HSO_3{}^-$: $\mathrm{p}K_{a2} = 1,8$
- Couple ion hydrogénosulfite $HSO_3{}^-$ / ion sulfite $SO_3{}^{2-}$: $\mathrm{p}K_{a3} = 7,0$

10. Écrire les 4 réactions de titrage et calculer leurs constantes d'équilibre.
11. Représenter les diagrammes de prédominance des différentes formes de l'acide sulfurique et de l'acide sulfureux. Placer les pH aux 2 équivalences sur ces diagrammes.
12. Déterminer les concentrations c_1 et c_2 en acide sulfurique et acide sulfureux.
13. Quel pK_a peut-on retrouver rapidement à partir de la courbe de pH ? Expliquer.

4 La mission spatiale Rosetta

La mission Rosetta, réalisé en 2014 par l'Agence Spatiale Européenne, a consisté à envoyer une sonde rejoindre la comète 67P Churyomov–Gerasimenko (rebaptisée Churry à cette occasion) sur son orbite à plusieurs centaines de millions de kilomètres de la Terre. Une fois sur place la sonde Rosetta a étudié l'environnement de Churry en se satellisant autour d'elle, puis a envoyé un robot, nommé Philæ, pour qu'il se pose sur la comète et réalise une étude in situ.

Données :

— Constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2}

— Masse du Soleil : $M_\odot = 2,0 \times 10^{30}$ kg

— Masse de la terre : $M_\oplus = 6,0 \times 10^{24}$ kg

4.1 Mouvement dans un champ newtonien

On établit ici quelques résultats généraux, utiles pour les parties suivantes. On considère un point matériel M de masse m soumis au champ de gravitation créé par un astre ponctuel de masse M_O, situé au point O.

14. Donner l'expression de la force de gravitation en coordonnées sphériques de centre O.
15. Montrer que le mouvement est plan.

Dans la suite, le point matériel est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) de centre O dans le plan du mouvement.

16. Montrer que $C = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m}$, où $\vec{L}_O$ est le moment cinétique par rapport à O, est une constante du mouvement. Établir l'expression de C en fonction de r et $\dot{\theta}$.
17. Établir l'expression de la vitesse aréolaire en fonction de C. En déduire la deuxième loi de Kepler.
18. Établir l'expression de l'énergie potentielle effective

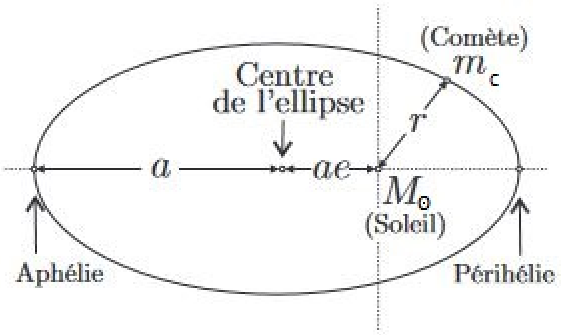
$$E_{\text{p,eff}}(r) = E_{\text{m}} - \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

en fonction de C, $\mathcal{G}$, m, M_O et r.

19. Tracer l'allure du graphe $E_{\text{p,eff}}(r)$.
20. Faire figurer sur le graphe $E_{\text{p,eff}}(r)$, le rayon r_0 et l'énergie mécanique E_0, correspondants à une trajectoire circulaire. Établir les expressions de r_0 et E_0 en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_O et C.

4.2 Orbite de la comète 67P Churyomov–Gerasimenko

On considère l'orbite elliptique de la comète Churry, de masse m_c. On note a le demi grand-axe de la trajectoire et e son excentricité. La distance du foyer O au centre de l'ellipse est alors ea.



21. Donner les expressions de r_P et r_A les distances de O au périhélie et à l'aphélie, en fonction de a et e.
22. En utilisant l'énergie potentielle effective, établir une équation du second degré en r dont r_P et r_A sont solutions. La résoudre, après avoir vérifié que son déterminant est positif.
23. En déduire l'expression de E_{m} en fonction de $\mathcal{G}$, m_c, $M_\odot$ et a, ainsi que la relation

$$e^2 = 1 - \frac{C^2}{\mathcal{G} M_\odot a}$$

24. Sachant que l'aire d'une ellipse d'excentricité e et de demi-grand axe a est $S = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$ et en utilisant l'expression de la vitesse aréolaire établie précédemment, établir la relation entre la période T de la comète et le demi-grand axe a de l'ellipse. Comment s'appelle cette loi ?

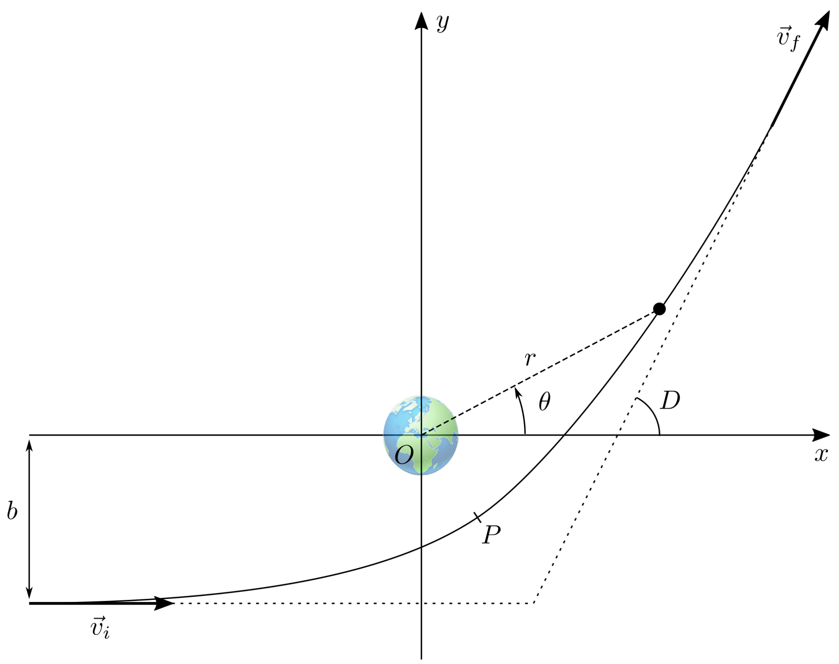
Les caractéristiques de l'orbite de la comète Churry sont : $r_P = 1,24$ ua et $r_A = 5,68$ ua, où ua est l'unité astronomique de longueur égale à 149,6 Gm.

25. Calculer la période de révolution de la comète Churry, en années.

4.3 Principe de l'assistance gravitationnelle

Pour réaliser son rendez-vous avec la comète, Rosetta a décrit quatre orbites autour du Soleil en utilisant l'assistance gravitationnelle de la Terre et de Mars pour relever progressivement son aphélie. Dans cette partie, on étudie le principe d'une assistance gravitationnelle par la Terre.

Dans un premier temps, on étudie le mouvement de la sonde de masse m_s dans le référentiel géocentrique de centre O. La trajectoire de Rosetta au voisinage de la Terre est représentée ci-dessous. On note b le paramètre d'impact et D, l'angle de déviation.



26. Montrer que $v_i = v_f$.
27. Exprimer C en fonction de b et v_i.
28. Établir l'expression de la distance minimale d'approche r_P en fonction de b, v_i, $\mathcal{G}$ et $M_\oplus$. On pourra éventuellement utiliser les résultats de la question 22.
29. Montrer que

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = -\mathcal{G}M_\oplus \int_{t_i}^{t_f} \frac{\vec{u}_r}{r^2}\mathrm{d}t$$

30. En projetant cette relation sur $\vec{u}_y$, établir l'expression de $\tan(\frac{D}{2})$ en fonction de b, v_i, $\mathcal{G}$ et $M_\oplus$.

On cherche maintenant à exprimer la variation de vitesse de la sonde dans le référentiel héliocentrique. On suppose que la Terre se déplace dans le référentiel héliocentrique, dans la direction y, avec une vitesse $\vec{v}_\oplus = v_\oplus \vec{u}_y$. Le vecteur vitesse de la sonde dans le référentiel héliocentrique est donc : $\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}_\oplus$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la sonde dans le référentiel géocentrique. On note v_i' la vitesse initiale de la sonde dans le référentiel héliocentrique, et v_f' sa vitesse finale.

31. Exprimer ${v_i'}^2$ en fonction de v_i et $v_\oplus$.
32. Exprimer ${v_f'}^2$ en fonction de v_i, $v_\oplus$ et D.
33. En déduire la variation d'énergie cinétique de la sonde dans le référentiel héliocentrique, en fonction de m, v_i, $v_\oplus$ et D. Dans cette configuration, pour quelle valeur de D le gain d'énergie cinétique est-il maximal ?

Correction du DS n° 7

1 Transformations d'un gaz parfait

1. La vitesse quadratique moyenne est $u = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}$.
   L'énergie cinétique de translation moyenne par particule est $\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$ avec $m = \frac{M_{\mathrm{O_2}}}{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}}$ et $R = k_{\mathrm{B}}\mathcal{N}_{\mathrm{A}}$, donc $\langle v^2\rangle = \frac{3RT}{M_{\mathrm{O_2}}}$.
   Ainsi, pour $T = 20°\mathrm{C} = 293$ K, $\boxed{u = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\mathrm{O_2}}}} = 478 \text{ m/s}}$
2. $H = U + PV = U + nRT$ donc $C_P = C_V + nR$
   $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ donc $\boxed{C_V = \frac{nR}{\gamma-1} \text{ et } C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma-1}}$
3. Si la transformation est suffisamment lente, on peut supposer que le transfert thermique avec l'extérieur (modélisé par un thermostat), maintient le gaz à T_0.
4. A l'état initial, $P_0V_0 = nRT_0$, à l'état final, $P_1 2V_0 = nRT_0$, donc $\boxed{P_1 = \frac{P_0}{2}}$
5. On applique le 1er principe au système gaz ∪ cylindre : $\Delta U = W + Q$
   $W = -\int P_{\mathrm{ext}}\mathrm{d}V$
   Or $P = P_{\mathrm{ext}}$ car si le système reste à l'équilibre thermique, il reste nécessairement à l'équilibre mécanique qui s'établit beaucoup plus rapidement, donc $W = -\int P\mathrm{d}V = -\int \frac{nRT_0}{V}\mathrm{d}V = -nRT_0\ln(2)$
   $\Delta U = C_V\Delta T = 0$ (transformation isotherme), donc $\boxed{Q = -W = P_0V_0\ln(2)}$
   $Q > 0$ donc le transfert thermique se fait de l'extérieur vers le gaz.
6. Si la transformation est suffisamment rapide, on peut supposer que le transfert thermique avec l'extérieur n'a pas le temps de se faire.
7. A l'état initial, $P_0V_0 = nRT_0$, et à l'état final, $P_0V_2 = nRT_2$, donc $\frac{V_2}{V_0} = \frac{T_2}{T_0}$
   On applique le 1er principe au système gaz ∪ cylindre : $\Delta U = W + Q$
   $W = -\int P_0\mathrm{d}V = P_0(2V_0 - V_2)$ (transformation monobare) et $Q = 0$ (transformation adiabatique)
   $\Delta U = C_V\Delta T = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_0)$
   donc $\frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_0) = P_0(2V_0 - V_2)$
   En divisant par $nRT_0 = P_0V_0$, on a $\frac{1}{\gamma-1}(\frac{T_2}{T_0} - 1) = 2 - \frac{V_2}{V_0}$, or $\frac{V_2}{V_0} = \frac{T_2}{T_0}$
   On en déduit $\boxed{T_2 = (2 - \frac{1}{\gamma})T_0 \text{ et } V_2 = (2 - \frac{1}{\gamma})V_0}$
8. $\gamma > 1$ (car $C_P = C_V + nR$ d'où $C_P > C_V$) donc $2 - \frac{1}{\gamma} > 1$, ainsi $\boxed{T_2 > T_0 \text{ et } V_2 > V_0}$

2 Expérience de Joule

9. On considère le système (eau ∪ enceinte ∪ ailettes ∪ axe de rotation ∪ fil ∪ masse). Ce système subit une transformation monobare avec $P_{\mathrm{ext}} = P_i = P_f$. On suppose que la transformation est suffisamment rapide pour être considérée comme adiabatique.
   D'après le 1er principe, $\Delta H + \Delta E_m = W_{\mathrm{autre}} + Q = 0$
   $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_{\mathrm{pp}} = -mgh$ et $\Delta H = C\Delta T$
   donc $\boxed{\Delta T = \frac{mgh}{C} = 0,03°\mathrm{C}}$
   Cette variation de température est difficilement mesurable. Pour obtenir une variation de température significative, J.P. Joule a fait tombé la masse une cinquantaine de fois avant de mesurer la variation de température.

3 Titrage d'un mélange d'acides sulfurique et sulfureux

10. L'acide sulfurique est un acide fort, donc est totalement dissocié en $H_3O^+ + HSO_4{}^-$ en solution aqueuse. Les réactions de titrages sont :

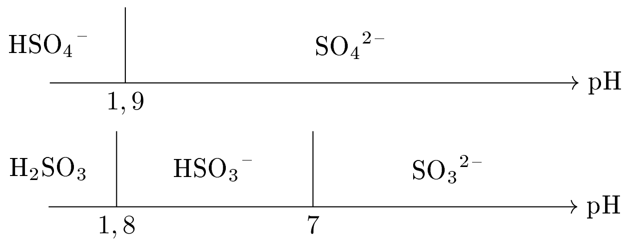
$$H_3O^+ + HO^- = 2\,H_2O \qquad K_0 = \frac{1}{K_e} = 10^{14}$$

$$HSO_4{}^- + HO^- = SO_4{}^{2-} + H_2O \qquad K_1 = \frac{K_{a1}}{K_e} = 10^{12}$$

$$H_2SO_3 + HO^- = HSO_3{}^- + H_2O \qquad K_2 = \frac{K_{a2}}{K_e} = 10^{12,3}$$

$$HSO_3{}^- + HO^- = SO_3{}^{2-} + H_2O \qquad K_3 = \frac{K_{a3}}{K_e} = 10^{7}$$

11.



A la 1ère équivalence, pH = 5, donc $HSO_4{}^-$ s'est transformé en $SO_4{}^{2-}$ et H_2SO_3 s'est transformé $HSO_3{}^-$, donc les 3 premières réactions sont simultanées et correspondent à la 1ère équivalence.

A la 2nde équivalence, pH = 10, donc $HSO_3{}^-$ s'est transformé en $SO_3{}^{2-}$.

12. A la 1ère équivalence ($V_{\text{éq}1} = 14$ mL), on a titré les 2 acidités de H_2SO_4 et la 1ère acidité de H_2SO_3, donc $2n_{H_2SO_4,\,i} + n_{H_2SO_3,\,i} = n_{HO-,\,\text{versé}}$, soit $2c_1V_0 + c_2V_0 = cV_{\text{éq}1}$

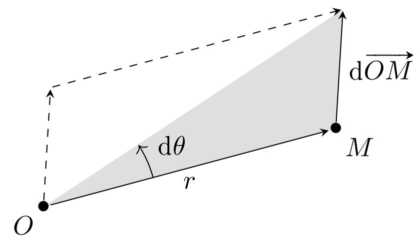
A la 2nde équivalence ($V_{\text{éq}2} = 20$ mL), on a titré le $HSO_3{}^-$ formé à la 1ère équivalence, donc $n_{HSO_3-,\,\text{formé}} = n_{H_2SO_3,\,i} = n_{HO-,\,\text{versé entre les 2 équivalence}}$, soit $c_2V_0 = c(V_{\text{éq}2} - V_{\text{éq}1})$, d'où $\boxed{c_2 = 0,030 \text{ mol/L}}$

On en déduit $c_1 = \frac{cV_{\text{éq}1}}{2V_0} - \frac{c_2}{2}$, soit $\boxed{c_1 = 0,020 \text{ mol/L}}$

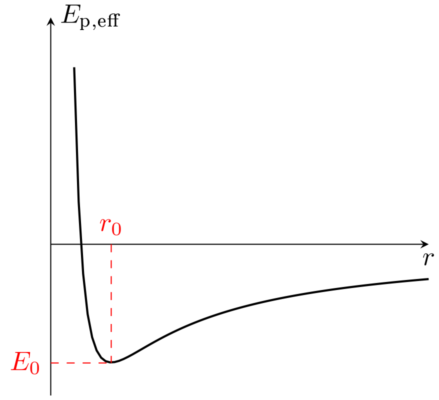
13. Entre les 2 équivalences (à $V = \frac{V_{\text{éq}1}+V_{\text{éq}2}}{2} = 17$ mL), la moitié du $HSO_3{}^-$ formé à la 1ère équivalence s'est transformée en $SO_3{}^{2-}$, donc $\left[HSO_3{}^-\right] = \left[SO_3{}^{2-}\right]$, d'où pH = p$K_{a3}$

4 La mission spatiale Rosetta

14. $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_O}{r^2}\vec{u}_r$
15. $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$
D'après le théorème du moment cinétique en O, $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$, donc le moment cinétique se conserve.
$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ donc $\overrightarrow{OM} \perp \vec{L}_O$ constant. Par conséquent, le point M reste dans le plan orthogonal à $\vec{L}_O$ passant par O : le mouvement est plan.
16. Le moment cinétique se conserve, donc C est constante.
$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$, $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, d'où $\vec{L}_O = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$, donc $\boxed{C = r^2|\dot{\theta}|}$
17. La vitesse aréolaire est la dérivée de l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps , soit $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ où $\mathrm{d}S$ est l'aire infinitésimale balayée pendant $\mathrm{d}t$.



L'aire $\mathrm{d}S$ du triangle balayé pendant $\mathrm{d}t$ est la moitié de l'aire de parallélogramme construit à partir des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, donc
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\|$$
On en déduit la vitesse aréolaire : $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{v}}\| = \frac{1}{2}\frac{\|\vec{L}_O\|}{m} = \frac{C}{2}$
La vitesse aréolaire est constante, d'où la 2ème loi de Kepler : le vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaie des aires égales pendant des durées égales.
18. $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, donc $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$
$$\begin{aligned} E_\mathrm{m} &= \frac{1}{2}mv^2 + E_\mathrm{p} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mM_O}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_\mathrm{p,eff} \end{aligned}$$
où $\boxed{E_\mathrm{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mM_O}{r}}$ est l'énergie potentielle effective.
19.



20. On cherche le minimum de $E_\mathrm{p,eff}(r)$.
$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p,eff}}{\mathrm{d}r} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{\mathcal{G}mM_O}{r^2}$

$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{p,eff}}}{\mathrm{d}r}(r_0) = 0$ donc $\boxed{r_0 = \frac{C^2}{\mathcal{G}M_O}}$

$\boxed{E_0 = E_{\mathrm{p,eff}}(r_0) = -\frac{m(\mathcal{G}M_O)^2)}{2C^2}}$

21. $r_P = (1-e)a$ et $r_A = (1+e)a$
22. P et A sont tels que $\dot{r} = 0$ donc tels que $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{p,eff}}(r)$. Ainsi, r_P et r_A sont les solutions de l'équation :

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mM_O}{r}$$

$$E_{\mathrm{m}}r^2 + \mathcal{G}mM_O r - \frac{mC^2}{2} = 0$$

$\Delta = (\mathcal{G}mM_O)^2 + 2E_{\mathrm{m}}mC^2 = 2mC^2(E_{\mathrm{m}} - E_0)$
D'après le graphe d'énergie potentielle effective, $E_{\mathrm{m}} > E_0$, donc $\Delta > 0$.

$$\boxed{r_{\substack{P\\A}} = \frac{-\mathcal{G}mM_O \pm \sqrt{\Delta}}{2E_{\mathrm{m}}}}$$

23. Dans le polynôme du 2nd degré, on identifie la somme des racines : $r_P + r_A = -\frac{\mathcal{G}mM_O}{2E_{\mathrm{m}}}$ d'où $\boxed{E_{\mathrm{m}} = -\frac{\mathcal{G}mM_O}{2a}}$

et le produit des racines : $r_P r_A = -\frac{mC^2}{2E_{\mathrm{m}}}$ d'où $a^2(1-e^2) = \frac{C^2 a}{\mathcal{G}M_O}$ soit $\boxed{e^2 = 1 - \frac{C^2}{\mathcal{G}M_O a}}$

24. $S = \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \pi C\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_O}}$

La vitesse aréolaire constante est $\frac{S}{T} = \frac{C}{2}$, d'où $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mathcal{G}M_O}}}$

$\frac{T^2}{a^3}$ est une constante : on retrouve la 3ème loi de Kepler ou loi des périodes.

25. $a = \frac{r_P + r_A}{2}$, $\boxed{T = 18 \text{ a}}$
26. La force de gravitation est conservative. D'après le théorème de l'énergie mécanique, $\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$, donc $v_i = v_f$
27. $\vec{L}_{O,i} = \overrightarrow{OM_i} \wedge m\vec{v}_i = (x_i\vec{u}_x - b\vec{u}_y) \wedge mv_i\vec{u}_x = mbv_i\vec{u}_z$, donc $C = \frac{\|\vec{L}_O\|}{m} = bv_i$
28. D'après 22.,

$$r_P = \frac{-\mathcal{G}mM_O + \sqrt{(\mathcal{G}mM_O)^2 + 2E_{\mathrm{m}}mC^2}}{2E_{\mathrm{m}}}$$

$$\boxed{r_P = -\frac{\mathcal{G}M_O}{v_i^2} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{G}M_O}{v_i^2}\right)^2 + b^2}}$$

29. D'après le principe fondamental de la dynamique, $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{G}mM_O}{r^2}\vec{u}_r$

On intègre entre t_i et t_f, $\vec{v}_f - \vec{v}_i = -\mathcal{G}M_O\displaystyle\int_{t_i}^{t_f}\frac{\vec{u}_r}{r^2}\mathrm{d}t$

30. On projette selon $\vec{u}_y$: $v_i\sin(D) = -\mathcal{G}M_O\int_{t_i}^{t_f}\frac{\sin(\theta)}{r^2}\mathrm{d}t$

Or $r^2 = \frac{C}{\dot{\theta}} = \frac{bv_i}{\dot{\theta}}$ ($\dot{\theta} > 0$), donc $-\displaystyle\int_{t_i}^{t_f}\frac{\sin(\theta)}{r^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{bv_i}\int_{t_i}^{t_f} -\sin(\theta)\dot{\theta}\mathrm{d}t = \frac{1}{bv_i}[\cos(\theta_f) - \cos(\theta_i)]$

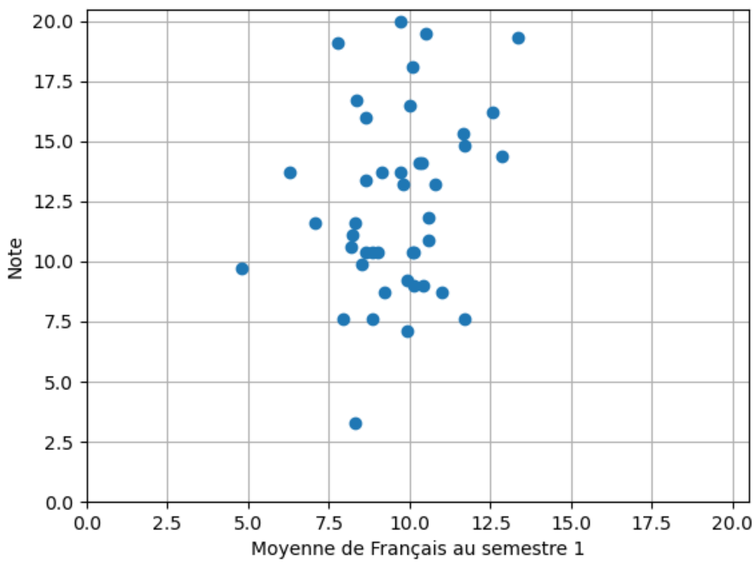
$\theta_i = -\pi$ et $\theta_f = D$, ainsi $\sin(D) = \frac{\mathcal{G}M_O}{bv_i^2}[\cos(D) + 1]$

Or $\sin(D) = 2\sin(\frac{D}{2})\cos(\frac{D}{2})$ et $\cos(D) = 2\cos^2(D) - 1$, donc $\boxed{\tan(\frac{D}{2}) = \frac{\mathcal{G}M_O}{bv_i^2}}$

31. $\vec{v}'_i = v_i\vec{u}_x + v_\oplus\vec{u}_y$ donc ${v'_i}^2 = v_i^2 + v_\oplus^2$
32. $\vec{v}'_f = v_f[\cos(D)\vec{u}_x + \sin(D)\vec{u}_y] + v_\oplus\vec{u}_y = v_i\cos(D)\vec{u}_x + [v_i\sin(D) + v_\oplus]\vec{u}_y$
donc ${v'_f}^2 = v_i^2\cos^2(D) + [v_i\sin(D) + v_\oplus]^2 = v_i^2 + v_\oplus^2 + 2v_iv_\oplus\sin(D)$
33. $\Delta E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}m{v'_f}^2 - \frac{1}{2}m{v'_i}^2 = mv_iv_\oplus\sin(D)$
Le gain d'énergie cinétique est maximal pour $\sin D = 1$ donc pour $\boxed{D = \frac{\pi}{2}}$

Commentaires du DS n° 7 de Physique-Chimie

Moyenne : 12,4/20
Max : 20/20



1. $< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T$ est l'énergie cinétique de translation moyenne par particule. Ici, m désigne donc la masse d'une seule particule, soit $m = M/\mathcal{N}_\mathrm{A}$.

   Pour un gaz parfait diatomique, il est vrai que $< E_\mathrm{c} >= \frac{5}{2}k_\mathrm{B}T$, sauf que les molécules diatomiques ont une énergie cinétique de rotation : $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 + E_{\mathrm{c}rotation}$. On a toujours $< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T$ et la formule de la vitesse quadratique moyenne n'est pas modifiée.

   Attention, l'unité standard de masse du système international est kg, et non le g.

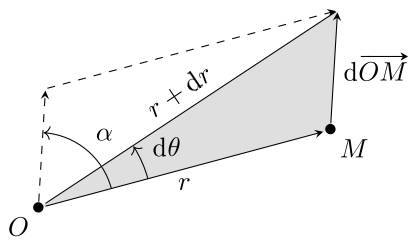
5. C'est vrai que la pression à l'extérieur du cylindre est constante, mais la transformation n'est pas monobare, car le système n'est pas soumis aux seules forces de pression : il y a aussi la force de l'opérateur. Néanmoins, tout se passe comme si le système était soumis aux seules forces extérieures de pression avec $P_\mathrm{ext} = P_0 - \frac{F_\mathrm{op}}{S}$, qui n'est pas constante.

   W et Q sont le travail et le transfert thermique recus par le système. Si W ou $Q > 0$, le système recoit effectivement du travail ou du transfert thermique ; si W ou $Q < 0$, le système fournit du travail ou du transfert thermique.

8. $C_P = C_V + nR > C_V$, donc $\gamma > 1$

9. L'acide sulfurique est un acide fort, donc n'existe pas en solution aqueuse : les espèces à considérer sont directement H_3O^+ et $HSO_4{}^-$.

17. Attention, l'angle entre $\overrightarrow{OM}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ n'est pas $\mathrm{d}\theta$, mais α, donc $\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OM}\|\|\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\|\sin(\alpha)$



   Apprenez une formulation correcte de la 2ème loi de Kepler : ce n'est pas le point M qui balaie des aires égales, mais le vecteur ou segment $[OM]$.