XXX. Espace euclidiens

- Produit scalaire, espaces préhilbertiens, espace euclidien.
- Produit scalaires usuels : sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ($\int_a^b fg$), sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ ($\mathrm{Trace}(A^\top B)$).
- Norme euclidienne. Propriétés de norme. Inégalité de Cauchy-Schwarz, triangulaire. Identités de polarisation.
- Vecteurs orthogonaux. Famille orthogonale, orthonormale. Théorème de Pythagore.
- Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Existence de bon.
- Coordonnées dans une bon. Expression du produit scalaire dans une bon.
- Sous-espaces vectoriels orthogonaux.
- Orthogonal d'une partie de E.
  Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie.
  Dimension de l'orthogonal si E est de dimension finie.
- Projection orthogonale. Expression dans une bon. Caractérisation par $u - p_F(u) \perp F$.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace : $d(u,V) = \|u - p_F(u)\|$ et $d^2(u,F) = \|u\|^2 - \|p_F(u)\|^2$.

Questions de cours (preuve à connaître)

- Théorème de Pythagore. Cas de deux vecteurs et de n vecteurs.
- $(A,B) \mapsto \mathrm{Trace}(A^\top B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.
- Si F de dimension finie, F et $F^\perp$ sont supplémentaires et orthogonaux.
- Expression de la projection dans une bon.
- Déterminer le minimum de $\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Cahier de colles : groupes 13,14,15,16