

Pour différencier les exercices selon les difficultés, ils sont étiquetés par les symboles : (♡), (*), (**), (***) .

- (♡): pour un exercice très proche du cours qui ne nécessite pas trop de recherche, de calcul, de prise d'initiative.
- (*): pour un exercice qui demande davantage de calculs, de réflexion sans pour autant être difficile.
- (**): pour un exercice un peu plus difficile qui demandera davantage de prises d'initiative, davantage de calculs. Un exercice où l'on n'a pas forcément tout de suite l'idée qui marche et qui demandera donc peut-être plusieurs essais.
- (***) : pour un exercice beaucoup plus difficile.

Sommes simples, produits simples

Exercice 1. (♡) Les démonstrations du cours non traitées (ne sera pas corrigé en TD)

Prouver:

1) la formule donnant $\sum_{k=0}^n k^2$ (par récurrence)

2) la formule donnant $\sum_{k=0}^n k^3$ (par récurrence et par télescopage)

Exercice 2. (♡) Pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes:

1) -a- $S_n = \sum_{k=0}^n 3^{2k}$

-b- $S_n = \sum_{k=2}^n 2^{-3k}$

-c- $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{3k-1} 3^{k+2}$

-d- $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{5^{2k+1}}{3^{3k-2}}$

-e- $S_n = \sum_{k=0}^n 3^k 2^{n-k}$

-f- $S_n = \sum_{k=2}^n 2^{3k} 3^{n-2k}$

2) -a- $S_n = \sum_{k=0}^n k(k+2)$

-b- $\sum_{k=3}^{15} \frac{3k-1}{2}$

-c- $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + \dots + 2n + 1$

-d- $S_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + (n-1)2 + n$

3) -a- $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \min(k, n)$

-b- $S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1)$

-c- $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$

4) -a- $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

-b- $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right)$

-c- $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ [Écrire $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k}$
où a et b réels à déterminer]

-d- $S_n = \sum_{k=1}^n k \times k!$ [$k = (k+1) - 1$]

-e- $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ [$k = (k+1) - 1$]

Exercice 3. (♡) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{n+1}{2n}$. [On pourra faire apparaître un télescopage...]

Exercice 4. (*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

2) En déduire la valeur de la somme S_n .

Exercice 5. (*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k2^k$.

A l'aide du changement d'indice $j = k - 1$, calculer S_n . [On cherchera à retrouver S_n dans l'expression de S_n obtenue...]

Exercice 6. (***) Soit $n \geq 2$ et $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x_{n+1} = x_1$. Montrer que:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k x_{k+1}.$$

Exercice 7. (***) Soit $a \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$ que l'on souhaite calculer.

En calculant $(1-a)S_n$ faire apparaître une somme télescopique.

Factorielles, coefficients binomiaux, formules du binôme

Exercice 8. (♥) Simplifier les expressions suivantes:

$$A_n = \frac{(n+3)!}{(n-1)!} \quad B_n = \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{n!}{(n+2)!} \quad C_n = (n+1)! - n! \quad D_n = \frac{n!}{p!} - \frac{(n-1)!}{(p+1)!}.$$

Exercice 9. (♥) Exprimer à l'aide de factorielles

$$A_n = n(n-1)(n-2) \quad B_n = 2n(2n-2)(2n-4) \cdots 4 \times 2 \quad C_n = \prod_{i=1}^n (2i-1).$$

Exercice 10. (♥) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k! \leq (n+1)!$.

Exercice 11. (*) Montrer, par récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n+1}$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\begin{aligned} 1) (\heartsuit) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} & \quad 2) (\heartsuit) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{2k} 2^{2n-k} & \quad 3) (*) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} & \quad 4) (*) \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1}. \\ 5) (*) \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}. \text{ En déduire } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} & \quad 6) (**) \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Exercice 13. (*) Autre méthode

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la fonction $x \mapsto (1+x)^n$ (dériver ou intégrer), calculer les sommes

$$1) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad 2) \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} \quad 3) \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}. \text{ En déduire } \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 14. (*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$.

- 1) En effectuant le changement d'indice $j = 2n + 1 - k$, déterminer une autre expression de S_n .
- 2) En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n .

Exercice 15. (**) Soient n, p, q des entiers naturels tels que $n \leq p + q$.

En développant de deux manières différentes $(1+x)^p(1+x)^q$ calculer la somme : $S_n(p, q) = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}$.

Rappel : l'égalité de deux fonctions polynomiales entraîne l'égalité des coefficients.

Exercice 16. (**) Soient k, p et n entiers naturels vérifiant $p \leq k \leq n$.

- 1) Montrer que $\binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}$.
- 2) En déduire la valeur des sommes:

$$S = \sum_{p=0}^k \binom{n-p}{k-p} \binom{n}{p} \quad T = \sum_{k=p}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{p}$$

Sommes doubles**Exercice 17.** (♥) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes:

$$\begin{array}{lll} 1) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i & 3) \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+1)^2 & 5) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (ij) \\ 2) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i & 4) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) & 6) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} \end{array}$$

Exercice 18. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes:

$$1) \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \quad 2) \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$$

Exercice 19. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^n k2^k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k 2^j \right)$. En déduire alors le calcul de la somme $\sum_{k=1}^n k2^k$.

Systemes

Exercice 20. (♥) Résoudre les systemes:

$$\begin{aligned}
 (S_1) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases} & \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ x + 4y + z = -1 \end{cases} & \quad (S_3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ x + 4y + z = 4 \end{cases} \\
 (S_4) \begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 0 \\ x - y - z + t = 2 \end{cases} & \quad (S_5) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases} \\
 & \quad (S_6) \begin{cases} x - 2y + z + t = -2 \\ 2x - y - z - t = -1 \\ x + y + z + t = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 21. (*) Résoudre en fonction du paramètre réel m les systemes:

$$\begin{aligned}
 (S_1) \begin{cases} x + 2y - 3z = m \\ 2x + 3y + z = m + 3 \\ 4x + 7y - 5z = 2m + 5 \end{cases} & \quad (S_2) \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases} \\
 (S_3) \begin{cases} x - y + mz = m \\ x + my - z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} & \quad (S_4) \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = -1 \\ x + y + mz + t = 1 \\ x + y + z + mt = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 22. (**) Résoudre le systeme d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a_1 \\ x_2 + x_3 = 2a_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2a_{n-1} \\ x_n + x_1 = 2a_n \end{cases} .$$