Exercice 1. ($*$) On considère la fonction $f : x \mapsto x^x$.

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, puis étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, que l'on notera encore f. On donnera $f(0)$.
3) Étudier la dérivabilité de f en 0.
4) Dresser le tableau de variations de f.
5) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 2. ($*$) Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ pour en tracer la courbe représentative. *On utilisera* $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \approx 1.4$. *Suivre le même plan qu'à l'exercice 1.*

Exercice 3. ($\heartsuit$) On pose $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$. Donner l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f en 0, 1, $+\infty$.

Exercice 4. ($*$) Calculer les limites des fonctions dont les expressions sont données ci-dessous en les points données:

1) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \ln x$ en $+\infty$
2) $f(x) = \ln(2 + x^2) - x^5$ en $+\infty$
3) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + 2x^2)}{\ln(2x + 3)}$ en 0 et en $+\infty$
4) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$ en $+\infty$
5) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$ en $+\infty$, en 0.

Exercice 5. ($\heartsuit$) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes:

1) $3^{x^2} = 2^{x^4}$
2) $x^{\sqrt{2x}} = \sqrt{x}^{x^2}$
3) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}$

Exercice 6 Calculer les limites suivantes:

1) ($\heartsuit$)
   -a- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin(5x)}$
   -b- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\sin(3x)}$
2) ($*$)
   -a- $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
   -b- $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$
   -c- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$
3) ($\heartsuit$)
   -a- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2^x}$
   -b- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2^x}$

Exercice 7. ($**$) Montrer que pour tout x appartenant à un intervalle à préciser on a : $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.