Exercice 1 On définit la fonction f par $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2)$.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 > 0\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x} - 2 > 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x} > 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^2}{\mathrm{e}^x} > 0\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0 \text{ car } \mathrm{e}^x > 0\\ &\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ car } (\mathrm{e}^x - 1)^2 \geqslant 0 \text{ et est nulle si et seulement si } x = 0.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E) \text{ est donc } \mathcal{S}_{(E)} = \mathbb{R}^*}$.

Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (E) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$. Donc, $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f,\ \mathcal{D}_f \text{ est } \mathbb{R}^*}$.

2)
- $\left| \begin{array}{l} x \mapsto -x \text{ est continue, dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ à valeur dans } \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x \text{ est continue, dérivable sur } \mathbb{R} \end{array} \right.$ donc, par composition $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
- De plus $x \mapsto -2$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, donc par somme $x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$
- Puis ln est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Par composition, $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$.

3) $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0, puis pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \ln(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x - 2) = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$..

4)
- **Limite en** $+\infty$.
$$\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par somme} \quad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Or $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc par composition $\ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$
- **Limite en** $+\infty$. Par parité de f, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$
- **Limite en** 0.
$$\mathrm{e}^x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1, \qquad \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{par somme} \quad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \underset{x\to+0}{\longrightarrow} 0_+ \ (0_+ \text{ car } \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 > 0).$$
Or $\ln(x) \underset{x\to0_+}{\longrightarrow} -\infty$, par composition $\ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2) \underset{x\to0_+}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0_+} f(x) = -\infty.}$ Par parité, $\boxed{\lim\limits_{x\to0_-} f(x) = -\infty.}$

Variations de f**.** Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

- $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}.$$

Comme $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$. Puis pour $x > 0$,
$$\mathrm{e}^x > 1 > \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} > 0.$$
Donc $\forall x > 0$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par parité, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5) -a- Soit $x \in \mathbb{R}^*$,
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\mathrm{e}^x\left(1 + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x}\right)\right)\\ &= \ln(\mathrm{e}^x) + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x}\right)\end{aligned}$$
$$\boxed{f(x) = x + \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x}\right)}.$$

-b- Montrons que $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'après, 5)-a-, pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) - x = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x}\right).$$
Or $\mathrm{e}^{-2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par somme $1 + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Or $\ln(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$ donc par composition $\ln(1 + \mathrm{e}^{-2x} - 2\,\mathrm{e}^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0.}$

Donc, $\boxed{\text{la droite d'équation } y = x \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ de } f \text{ au voisinage de } +\infty}$.

Par parité, $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x \text{ est asymptote à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ de } f \text{ au voisinage de } -\infty}$.

-c- On étudie le signe de $f(x)-x$ pour $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)-x=\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}-2\,\mathrm{e}^{-x}\right)=\ln\left(\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2\right).$$

Or pour $x>0$, $0<\mathrm{e}^{-x}<1$ donc $0<1-\mathrm{e}^{-x}<1$ donc $0<(1-\mathrm{e}^{-x})^2<1$, d'où $f(x)-x=\ln\left(\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2\right)<0$ et donc la courbe est au dessous de la droite d'équation $y=x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

7) -a- Sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, d'après 2) f est continue et d'après 4), f est strictement croissante. Donc d'après le théorème de la bijection monotone, f réalisé une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $f(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}$. Donc pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, il existe un unique $x\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x)=\lambda$.
L'équation $f(x)=\lambda$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, par parité il existe une autre unique solution sur $\mathbb{R}_-^*$. Finalement, $\boxed{\text{l'équation } f(x)=\lambda \text{ admet exactement deux solutions sur } \mathbb{R}^*}$.

-b- Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x)=\frac{4}{3} &\Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2)=\frac{4}{3}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}+1-2\,\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{e}^x\\
&\Leftrightarrow X^2-(2+\mathrm{e}^{\frac{4}{3}})X+1=0 \qquad \text{où } X=\mathrm{e}^x\\
&\Leftrightarrow X=\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\pm\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}+4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}}}{2} \qquad \Delta=(2+\mathrm{e}^{\frac{4}{3}})^2-4=\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}+4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}\\
&\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}+4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}}}{2}\right) \quad \text{ou} \quad x=\ln\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}+\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}+4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}}}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble-solution de l'équation } f(x)=\tfrac{4}{3} \text{ est } \left\{\ln\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}+4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}}}{2}\right),\ln\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}+\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}+4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}}}{2}\right)\right\}}.$$

Exercice 2 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}k^2$.

1) $S_1=(-1)^{1+1}$, donc $\boxed{S_1=1}$. $S_2=(-1)^{2+1}1^2+(-1)^{2+2}2^2$ donc $\boxed{S_2=3}$
$S_3=(-1)^{3+1}1^2+(-1)^{3+2}2^2+(-1)^{3+3}3^2$ donc $\boxed{S_3=6}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1+k}k^2=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1+k}k^2+(-1)^{n+1+n+1}(n+1)^2\\
&=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}k^2+(n+1)^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_{n+1}=-S_n+(n+1)^2}.$$

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_{2p} &= \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{2p+k} k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k^2 \qquad \text{car } (-1)^{2p+k} = (-1)^{2p}(-1)^k = (-1)^k. \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2p} k^2 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2p} k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{p} (2i)^2 - \sum_{i=1}^{p} (2i-1)^2 \qquad \text{(on a posé } k = 2i \text{ dans la 1ère somme et } k = 2i-1 \text{ dans la deuxième somme)} \\
&= \sum_{i=1}^{p} 4i^2 - \sum_{i=1}^{p} (4i^2 - 4i + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (4i^2 - (4i^2 - 4i + 1)) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (4i - 1) \\
&= p \frac{3 + (4p-1)}{2} \qquad \text{(somme des termes d'une suite arithmétique de raison 4 de premier terme 3)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_{2p} = p(2p+1)}$$

4) Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_{2p+1} &= -S_{2p} + (2p+1)^2 \qquad \text{(d'après 2))} \\
&= -p(2p+1) + (2p+1)^2 \qquad \text{(d'après 3))} \\
&= (2p+1)(-p + 2p + 1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_{2p+1} = (2p+1)(p+1)}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

- si n est pair, $n = 2p$, alors d'après 3),

$$S_n = S_{2p} = p(2p+1) = \frac{2p(2p+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- si n est pair, $n = 2p+1$, alors d'après 3),

$$S_n = S_{2p+1} = (2p+1)(p+1) = \frac{(2p+1)(2p+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On a donc bien: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$.

6) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$".

- **Initialisation**. $S_1 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors au rang $n+1$,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= -S_n + (n+1)^2 \qquad \text{(d'après 2))} \\
&= -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 \qquad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{-n(n+1) + 2(n+1)^2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}
\end{aligned}$$

- **Conclusion**. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$.