

Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{\max(i, j)}{\min(i, j)}$.

- 1) Calculer T_0, T_1, T_2 .
- 2) Calculer T_n .

Exercice 2. Questions indépendantes

- 1) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x^3+1}}}{x^5 + x^2 + 3}$.
- 2) Calculer la limite en $+\infty$ et en 0 de $f(x) = \frac{\ln(1 + 2x^3)}{3x^2 + 4x}$.
- 3) Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{a^{b^x}}{b^{a^x}}$ en fonction de $1 < a < b$.

Exercice 3

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $\cos(3\theta) = \cos(2\theta)$.
- 2) Soit θ réel, exprimer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ uniquement à l'aide de $\cos \theta$. On utilisera deux méthodes:
 - a- à l'aide de formules trigonométriques
 - b- à l'aide des complexes.
- 3) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $P(X) = 0$ où $X = \cos \theta$ et P une fonction polynomiale à préciser.
- 4) Déterminer les solutions de $P(X) = 0$.
- 5) Dédire ce qui précède les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$