MPSI/MP2I – Devoir Surveillé n° 1

Samedi 21 septembre 2024
Durée : 3 heures

La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale :

— chaque variable utilisée dans une démonstration doit être introduite ;
— chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément un théorème du cours, avec ses hypothèses exactes, ou en citant le numéro d'une question précédente du problème ;
— toute question amène une réponse dont la conclusion doit être encadrée ;
— les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrase en français ;
— les notations de l'énoncé doivent être respectées ;
— les copies doivent être numérotées ;
— on peut choisir l'ordre des exercices, mais on respectera l'ordre des questions ;
— on peut sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, les résultats qu'on admet.

Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES

Exercice 1

Résoudre l'équation $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{x+2}$ d'inconnue x réelle.

Exercice 2

Soit m un réel. Résoudre, selon la valeur de m, le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +(1-m)y & +z & = & 0 \\ (1-m)x & +y & +z & = & m \\ x & +y & +(1+m)z & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = (x+1)\ln(x) - 2(x-1).$$

1) Justifier que f est deux fois dérivable et que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \frac{x-1}{x^2}.$$

2) En déduire le signe de f' et les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Dresser le tableau de variations de f et calculer $f(1)$.
3) Conclure que :

$$\forall\, x \in \,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,, \quad \frac{x+1}{x-1}\ln(x) \geqslant 2.$$

Exercice 4

Cet exercice vise à établir quelques résultats en lien avec l'identité spectaculaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Dans les premières questions, on prouvera cette identité en calculant – de deux manières différentes – la somme des cubes qui apparaît à gauche. Puis on démontrera que cette identité caractérise la suite des entiers naturels successifs.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (x+1)^k$.

-a- Calculer $P(2)$, $P(0)$. Exprimer $P(x)$, sans le symbole Σ, pour tout x réel.

-b- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n+1}{p+1} x^p$.

-c- En développant l'expression $(x+1)^k$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \right) x^p$.

En admettant que deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients, on a donc démontré grâce à 1)-b- et 1)-c- que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [\![0, n]\!]$,

$$(*) \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2) Retrouver la formule $(*)$ à l'aide d'une somme téléscopique. *Indication : écrire* $\binom{k}{p}$ *comme différence de deux coefficients binomiaux, à l'aide d'une formule du cours.*

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler les expressions de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. Le but de cette question est de retrouver la formule explicite de U_n.

-a- Écrire sous forme d'une fraction simplifiée le nombre $\binom{k}{3}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 3$.

-b- À l'aide de la relation $(*)$, déduire que $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) = \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$.

-c- En déduire la valeur de U_n.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans cette question, on propose encore une autre méthode pour retrouver la valeur de U_n.

-a- Justifier, sans calculer les sommes, que $U_n = \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} ((n-k)^3 + k^3)$.

-b- En déduire la valeur de U_n.

6) Réciproque. Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels *strictement positifs* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} (a_k)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2.$$

-a- Justifier que a_1 est solution de l'équation $x^3 = x^2$ puis en déduire sa valeur.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que : $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ a_k = k$.

-i- Montrer alors que :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 + n(n+1)a_{n+1} + (a_{n+1})^2.$$

-ii- En déduire que a_{n+1} est solution de l'équation $x^2 - x - n(n+1) = 0$ puis déterminer a_{n+1}.

-c- Montrer finalement que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = n$.

Exercice 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

1) Démontrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,\ (x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y))$.

2) Soient a, b deux réels.

-a- Établir l'encadrement :

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Indication : utiliser la question précédente pour l'une des deux inégalités.

-b- Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les trois membres de l'encadrement sont égaux.

3) Démontrer l'inégalité renversée :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{|a|}{1+|a|} - \frac{|b|}{1+|b|} \right| \leqslant \frac{|a-b|}{1+|a-b|}.$$