MPSI/MP2I – Devoir Surveillé 1
Samedi 21 septembre 2024
Corrigé

Exercice 1

On pose (E) $\sqrt{3x+3}-1=\sqrt{x+2}$.

Méthode 1 : ceci est défini si et seulement si $x \geqslant -1$ et $x \geqslant -2$.
Soit $x \in [-1,+\infty[$,

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{3x+3}=\sqrt{x+2}+1.$$

Les deux membres sont alors positifs, on peut donc élever au carré

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow 3x+3=x+3+2\sqrt{x+2}\\ &\Leftrightarrow x=\sqrt{x+2}.\end{aligned}$$

Si $x<0$ alors comme $\sqrt{x+2}\geqslant 0$, E n'admet pas de solution.
Si $x \geqslant 0$, les deux membres sont positifs, on peut donc élever au carré,

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x^2=x+2\\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0\\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=2.\end{aligned}$$

Comme $x \geqslant 0$, on rejette 2.
Par conséquent, $\boxed{\text{l'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \{2\}}$.

Méthode 2 : par analyse-synthèse.
Soit $x \in [-1,+\infty[$.

- *Analyse.* Soit x une solution. En passant une première fois au carré, on trouve après simplifications :

  $$x+1=\sqrt{3x+3},$$

  puis finalement $x^2-x-2=0$ après un deuxième passage au carré, d'où

  $$\boxed{\text{nécessairement, } x=-1 \text{ ou } x=2.}$$

- *Synthèse.* Testons ces valeurs : $\sqrt{-3+3}-1=-1$ et $\sqrt{-1+2}=1$, donc -1 n'est pas solution. En revanche, $\sqrt{6+3}-1=2$ et $\sqrt{2+2}=2$, donc 2 est solution.

- *Conclusion.* Cette équation admet pour $\boxed{\text{unique solution le réel 2.}}$

Exercice 2

En notant (S_m) le système étudié :

$$\begin{aligned}(S_m) &\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-(1-m)L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & +(1-m)y & +z & = & 0\\ & -m(m-2)y & +mz & = & m\\ & my & +mz & = & 0\end{cases}\\
&\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & +(1-m)y & +z & = & 0\\ & my & +mz & = & 0\\ & -m(m-2)y & +mz & = & m\end{cases}\\
&\underset{L_3\leftarrow L_3+(m-2)L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x & +(1-m)y & +z & = & 0\\ & my & +mz & = & 0\\ & & m(m-1)z & = & m\end{cases}\end{aligned}$$

- Supposons $m \neq 0$ et $m \neq 1$. On obtient alors :

$$(S_m) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{m} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{m} L_3}}{\iff} \begin{cases} x & +(1-m)y & +z & = & 0 \\ & y & +z & = & 0 \\ & & (m-1)z & = & 1 \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est le singleton :

$$\boxed{\left\{ \left(\frac{-m}{m-1},\ \frac{-1}{m-1},\ \frac{1}{m-1} \right) \right\}}$$

- Supposons $m = 1$. On obtient alors $0 = 1$ pour la dernière équation, donc le système (S_1) est incompatible : l'ensemble des solutions est $\boxed{\emptyset}$.
- Supposons $m = 0$. On obtient alors $(S_0) \iff x + y + z = 0$. L'inconnue x est déterminée en fonction de y et z qu'on peut paramétrer librement.

  L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left\{ (-\lambda - \mu,\ \lambda,\ \mu) \ \mid \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Exercice 3

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = (x+1)\ln(x) - 2(x-1).$$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions usuelles qui le sont. Soit x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x) + (x+1) \times \frac{1}{x} - 2 \\ &= \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} - 2 \\ &= \ln(x) - 1 + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

   La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions usuelles qui le sont. Soit x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{x-1}{x^2}. \end{aligned}$$

   Nous obtenons bien que :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{x-1}{x^2}}.$$

2. D'après la question précédente, f'' est négative sur $]0,1]$, puis positive sur $[1,+\infty[$: la fonction f' est donc décroissante sur $]0,1]$, puis croissante sur $[1,+\infty[$. Elle possède ainsi un minimum en 1 qui vaut $f'(1) = 0$. Nous en déduisons que $\boxed{\text{la fonction } f' \text{ prend des valeurs positives sur } \mathbb{R}_+^*}$ et que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.

   On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (x+1) & = & 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) & = & -\infty \end{cases}$, et donc par produit : $\lim\limits_{x \to 0} (x+1)\ln(x) = -\infty$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} -2(x-1) = 2$, alors par somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

   Remarquons que : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x(\ln(x) - 2) + \ln(x) + 2$.

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et donc par somme $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x) + 2) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x) - 2) & = & +\infty \end{cases}$.

Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x)-2) = +\infty$, et donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

On a enfin $f(1) = (1+1)\ln(1) - 2(1-1)$ et donc $\boxed{f(1) = 0}$.

3. Soit x appartenant à $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   - Si $x > 1$, alors d'après la question précédente $f(x) \geqslant 0$, et donc $(x+1)\ln(x) - 2(x-1) \geqslant 0$, d'où $(x+1)\ln(x) \geqslant 2(x-1)$. Comme $x-1>0$, alors $\dfrac{x+1}{x-1}\ln(x) \geqslant 2$.
   - Sinon $0 < x < 1$, et d'après la question précédente $f(x) \leqslant 0$, d'où $(x+1)\ln(x) - 2(x-1) \leqslant 0$, et ainsi $(x+1)\ln(x) \leqslant 2(x-1)$. Comme $x-1<0$, alors $\dfrac{x+1}{x-1}\ln(x) \geqslant 2$.

   Nous en concluons que dans tous les cas :

$$\boxed{\forall\, x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\,,\ \frac{x+1}{x-1}\ln(x) \geqslant 2}.$$

Exercice 4

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k$.

-a- $P(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

$P(2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$, on a reconnu la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 de premier terme 1,

donc $\boxed{P(2) = \dfrac{1}{2}(3^{n+1}-1)}$. Puis, pour $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{P(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(x+1)^n - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}}$.

-b- Si $x \neq 0$, d'après 1)-a- et la formule du binôme de Newton,

$$P(x) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k\right) \quad \text{(le terme 1 correspond au terme pour } k=0\text{)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{k-1}$$

$$\boxed{P(x) = \sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1}x^p} \qquad \text{(on a posé } p = k-1\text{)}.$$

Si $x = 0$, d'une part $P(0) = n+1$. D'autre part, $\displaystyle\sum_{p=0}^{0}\binom{n+1}{p+1}x^p = \binom{n+1}{1}0^0 = n+1$.

Bilan: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1}x^p}$.

-c-

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}(1+x)^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}x^p\right)$$

$$\boxed{P(x)=\sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}\right)x^p}\qquad\text{(somme sur un triangle)}$$

On admet que deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont mêmes degré et mêmes coefficients. On a donc démontré grâce à 1)-b- et 1)-c-, que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[\![0,n]\!]$,

$$(*)\quad \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}.$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}$, $p\in[\![0,n]\!]$. D'après la formule du triangle de Pascal, pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geqslant p+1$, on a

$$\binom{k+1}{p+1}=\binom{k}{p+1}+\binom{k}{p}\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}.$$

On remplace dans la somme, en isolant le terme $k=p$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}&=\binom{p}{p}+\sum_{k=p+1}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)\\&=1+\left(\binom{n+1}{p+1}-\binom{p+1}{p+1}\right)\qquad\text{(par télescopage)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}\binom{n+1}{p+1}}.$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. $\boxed{S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$ et $\boxed{T_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$.

4) -a- Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geqslant 3$,

$$\binom{k}{3}=\frac{k!}{3!(k-3)!}=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)!}{6(k-3)!}\ \text{donc}\ \boxed{\binom{k}{3}=\frac{k(k-1)(k-2)}{6}}.$$

-b- Soit $n\geqslant 3$. D'après la relation $(*)$, avec $p=3$, $\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}$. Notons que:

$$\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)!}{4!(n-3)!}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)!}{24(n-3)!}\ \text{donc}\ \boxed{\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}}.$$

Donc d'après 4)-a-, il découle:

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}.$$

Notons que pour $k=0$, $k=1$, $k=2$ les termes de la somme sont nuls, on peut donc démarrer la somme à $k=0$, puis on simplifie pour obtenir: $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$.

Puis, pour $n=0$, $n=1$, $n=2$, l'égalité précédente est vraie (donne $0=0$).

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}}$.

-c- Soit $n \in \mathbb{N}$, tout d'abord:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2) = \sum_{k=0}^{n}(k^3 - 3k^2 + 2k) = U_n - 3T_n + 2S_n = U_n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1).$$

Donc en isolant U_n, on a d'après 4)-b-,

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)}{4}\left(2(2n+1) - 4 + (n-1)(n-2)\right) \\ &= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n) \end{aligned}$$

$$\boxed{U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

-a- Par linéarité de la somme,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}((n-k)^3 + k^3) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n-k)^3 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Le changement d'indice $j = n - k$ dans la première somme, donne alors

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)^3 = \sum_{j=0}^{n} j^3.$$

On obtient comme voulu,

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}((n-k)^3 + k^3) = U_n}.$$

-b- On en déduit:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}((n^3 - 3n^2k + 3nk^2 - k^3) + k^3) = \frac{1}{2}(n^3(n+1) - 3n^2S_n + 3nT_n) \\ &= \frac{1}{2}\left(n^3(n+1) - 3n^2\frac{n(n+1)}{2} + 3n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{n^2(n+1)}{4}\left(2(n+1) - 3n + 2n + 1\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{U_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

6) -a- Pour $n = 1$, la formule se traduit par l'égalité des sommes

$$\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2 = (a_1)^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{1}(a_k)^3 = (a_1)^3,$$

donc a_1 est solution de l'équation $x^2 = x^3$ que l'on résout par factorisation :

$$x^2 = x^3 \iff x^3 - x^2 = 0 \iff x^2(x-1) = 0 \iff x^2 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0.$$

Les solutions réelles sont donc 0 et 1. Or a_1 est strictement positif, donc $\boxed{a_1 = 1}$.

-b- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que : $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ a_k = k$.

-i- Par hypothèse, on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

En notant S cette somme, le résultat voulu se ramène à une identité remarquable :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right)^2 = (S + a_{n+1})^2 = S^2 + 2Sa_{n+1} + (a_{n+1})^2$$

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + n(n+1)a_{n+1} + (a_{n+1})^2}.$$

-ii- Par hypothèse, on sait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1} (a_k)^3 \quad (*)$$

Pour le membre droit, d'après l'hypothèse vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} (a_k)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k)^3\right) + (a_{n+1})^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + (a_{n+1})^3.$$

Pour le membre gauche, on utilisé la relation de 6)-b-i-, et donc $(*)$ se réécrit :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + n(n+1)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + (a_{n+1})^3.$$

On en déduit la relation cherchée :

$$\boxed{n(n+1)a_{n+1} + (a_{n+1})^2 = (a_{n+1})^3}.$$

Or $a_{n+1} \neq 0$, donc $\boxed{a_{n+1} \text{ est solution de l'équation } x^2 - x - n(n+1) = 0}$, que l'on résout. Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta = 1 + 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2.$$

Elle a donc deux solutions dans $\mathbb{R}$, qui sont :

$$\frac{1-(2n+1)}{2} = -n \qquad \text{et} \qquad \frac{1+(2n+1)}{2} = n+1.$$

Or a_{n+1} est solution de cette équation et strictement positif, donc $\boxed{a_{n+1} = n+1}$.

-c- On effectue une démonstration par récurrence.

- À tout $n \in \mathbb{N}^*$, on associe la proposition $\mathcal{P}_n$: $\boxed{\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k = k}$.
- Initialisation. La proposition $\mathcal{P}_1$ équivaut à “ $a_1 = 1$”, qui est vraie d'après **a)**.
- Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ et démontrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
  D'après l'hypothèse $\mathcal{P}_n$, on sait déjà que : $\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k = k$. De plus la question **b)** montre que $a_k = k$ reste vrai pour $k = n+1$. Cette égalité est donc satisfaite pour tout $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion. Par récurrence, on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k = k}$.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient $a_n = n$ en appliquant ceci avec $k = n$. D'où finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = n.}$$

Exercice 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

1) *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. *Supposons* que $x \leqslant y$. Alors,

$$f(x) - f(y) = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \leqslant 0$$

car $1 + x \geqslant 1 > 0$, $1 + y \geqslant 1 > 0$ et $x - y \leqslant 0$. Ainsi, $f(x) \leqslant f(y)$.

Remarque. Cette proposition traduit la croissance de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$. On pouvait donc aussi étudier le signe de sa dérivée f' sur cet intervalle :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geqslant 0.$$

2) Soient a, b deux réels.

-a- Comme d'après l'inégalité triangulaire $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, il vient $f(|a+b|) \leqslant f(|a|+|b|)$ d'après la croissance de f obtenue question précédente, ce qui donne déjà l'inégalité de gauche :

$$\boxed{\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}}.$$

Par ailleurs $|a| \geqslant 0$ et $|b| \geqslant 0$, donc :

$$\frac{|a|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} \qquad \text{et} \qquad \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|b|}{1+|b|},$$

d'où l'inégalité de droite en sommant terme à terme,

$$\boxed{\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}}.$$

-b-
- Soit (a, b) un couple tel que les trois membres sont égaux.
  D'après les inégalités précédentes, on a nécessairement :

$$\frac{|a|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|} \qquad \text{et} \qquad \frac{|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|b|}{1+|b|},$$

  ce qui donne $|a||b| = 0$ après simplifications, d'où $a = 0$ ou $b = 0$.
- Réciproquement. Soit (a, b) un couple tel que $a = 0$ ou $b = 0$.
  Si $a = 0$, les trois membres sont égaux à $\frac{|b|}{1+|b|}$.
  Si $b = 0$, les trois membres sont égaux à $\frac{|a|}{1+|a|}$.
- $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est donc : } \big\{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\big\}.}$

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

L'inégalité de gauche de l'encadrement de 2)-a- donne: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(|x+y|) \leqslant f(|x|) + f(|y|)$.

En posant $x = a - b$ et $y = b$, on obtient $f(|a|) \leqslant f(|a-b|) + f(|b|)$, d'où l'inégalité $f(|a|) - f(|b|) \leqslant f(|a-b|)$. De même $f(|b|) - f(|a|) \leqslant f(|b-a|)$. Or $|b-a| = |a-b|$, donc l'inégalité est vraie quel que soit le signe de $f(|a|) - f(|b|)$.