

Trigonométrie

Exercice 1. (♥)

- 1) En utilisant les angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$, calculer $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$.
- 2) Calculer $\sin \frac{\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12}$ en utilisant les formules de duplication.
- 3) Calculer $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{8}$ en utilisant les formules de duplication.

Exercice 2. (♥) Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} .

- 1) $2 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
- 2) $\sin x \leq \frac{1}{2}$
- 3) $2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$
- 4) $2 \sin^2 x - \cos x - 1 \geq 0$

Exercice 3 Résoudre dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes:

- 1) (♥) $(E_1) \quad \sqrt{3} \cos(2x) - \sin(2x) = 1$ $(E_2) \quad \cos(3x) + \sin(3x) = 1$
- 2) (*) $(E_3) \quad \sin x + \sin(3x) + \sin(5x) = 0$ $(E_4) \quad 4 \cos^2(2x) - 2(\sqrt{2} + 1) \cos(2x) + \sqrt{2} = 0.$

Inégalités et égalités

Exercice 4. (♥) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Exprimer $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$.

Exercice 5. (♥) Identité du parallélogramme.

- 1) Montrer que : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$.
- 2) Donner une interprétation géométrique de cette égalité.

Exercice 6. (*)

- 1) Soit $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$, montrer que $\left| \frac{a}{|a|^2} - \frac{b}{|b|^2} \right| = \frac{|a - b|}{|a||b|}$.
- 2) Soient a, b, c des complexes de module 1, prouver que: $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

Exercice 7. (*)

- 1) Prouver : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, |a||b - c| \leq |b||c - a| + |c||a - b|$.
- 2) En déduire : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, |a - b||d - c| \leq |a - c||b - d| + |a - d||b - c|$.

Exercice 8. (*) Montrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3, |1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geq 1$.

Exercice 9. (**) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et u une racine carrée de zz' (c'est-à-dire que $u^2 = zz'$).

Montrer que : $|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} - u \right|$.

Forme trigonométrique

Exercice 10 Donner le module et un argument de:

- 1) (♥) $i, 4 + 4i, \sqrt{3} + 3i, -7i, (1 + \sqrt{3}i)^4, \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$.
- 2) (♥) $(1 + i)^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $(1 + j)^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$)
- 3) (*) $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta + i \sin \theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$
- 4) (*) $\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Exercice 11. (*) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer que $|x - u| = |1 - xu|$.

Exercice 12. (**) Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Montrer que:

$$|z + z'| = |z - z'| \Leftrightarrow \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z') + \frac{\pi}{2} \text{ [}\pi\text{]}.$$

Utilisation des complexes pour la trigonométrie

Exercice 13. (♥) Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser les expressions suivantes

$$A = \sin^5 x, \quad B = \cos x \sin^3 x.$$

Exercice 14. (♥) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes

$$A = \cos(4x), \quad B = \sin(5x) \text{ on exprimera } B \text{ uniquement en fonction de } \sin x.$$

Exercice 15. (♥) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes:

- 1) $S = \sum_{k=0}^n \cos(k\frac{\pi}{6}), \quad T = \sum_{k=0}^n \sin(k\frac{\pi}{6})$
- 2) $S = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(k\frac{\pi}{3}), \quad T = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sin(k\frac{\pi}{3})$
- 3) $S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta), \quad T = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

Exercice 16. (*) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta)$.

Exercice 17. (*) Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \cos(k\frac{\pi}{3})$.

Exercice 18. (**) Après avoir déterminé les valeurs de θ pour lesquelles les sommes sont bien définies, montrer que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{\cos(k\theta)}{\cos^k(\theta)} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta \cos^n(\theta)} \quad \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k\theta)}{\cos^k(\theta)} = \frac{\cos^{n+1}(\theta) - \cos((n+1)\theta)}{\sin \theta \cos^n(\theta)}.$$

Racines n -ièmes - Résolution d'équations

Exercice 19. (♡) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{z-i}{z+i} = \frac{z+2}{z-3i} & 2) 2z + 6\bar{z} = 3 + 2i & 4) z^2 = |z|^2 \\ 3) z^3 = \bar{z} & & 5) 4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0. \end{array}$$

Exercice 20. (♡) Déterminer les racines carrées de $-3 - 4i$.

Exercice 21. (*) Calculer les racines quatrièmes complexes de $-7 + 24i$.

Exercice 22. (♡) Déterminer:

$$1) \text{ les racines quatrièmes de } \frac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}} \quad 2) \text{ les racines cinquièmes de } -i \quad 3) \text{ les racines sixièmes de } \frac{-4}{1+i}$$

Exercice 23. (*) En calculant les racines carrées de $e^{i\frac{\pi}{6}}$ de deux manières, déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24. (*) En utilisant les solutions de l'équation $z^{11} = -1$, montrer que :

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 25. (*) On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, on pose

$$S = \omega + \omega^2 + \omega^4, \quad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

- 1) Calculer $S + T$, ST .
- 2) Déterminer le signe de $\text{Im}(S)$.
- 3) En déduire les valeurs de S et T .

Exercice 26 Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes:

- 1) (♡) $z^2 + z + 1 - i = 0$
- 2) (♡) $iz^2 + (3 - 4i)z - 5 + i = 0$
- 3) (*) $z^3 - 2iz^2 + 3iz + 3 - i = 0$, sachant qu'il y a une solution imaginaire pure
- 4) (*) $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$
- 5) (*) $z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0$
- 6) (*) $\left(\frac{z+j}{z-j}\right)^2 + \frac{z+j}{z-j} + 1 = 0$, où j vérifie $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice. (**)

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $1 + z + z^2 + \dots + z^n = 0$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $1 + 2z + 2z^2 + \dots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 28. (*) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $27(z - i)^6 - (z + i)^6 = 0$.

Exercice 29. (**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$.

Exercice 30. (**) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2z = b \\ x + j^2y + jz = c \end{cases}$$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 31. (♡) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

- 1) $\frac{z+1-i}{z-i}$ appartient à $i\mathbb{R}$ 2) $\frac{1-iz}{1+iz}$ appartient à \mathbb{R} 3) $|z| = |z - 2|$

Exercice 32. (*) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants:

- 1) les points d'affixe $1, z, z^3$ sont alignés
2) les points d'affixe $1, z, z^2$ forment un triangle rectangle

Exercice 33. (*) Soient A, B, C trois points du plan deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c .
Montrer que A, B et C sont alignés si et seulement si $a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} \in \mathbb{R}$.

Exercice 34. (*) Soit A, B, C, D un carré dans le plan muni d'un repère orthonormé. On suppose que C et D sont à coordonnées entières. Montrer que A et B le sont aussi.

Exercice 35. (**) Soient A, B, C trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives a, b, c .

- 1) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - a)$.
2) En déduire que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$.
3) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0.$$