Trigonométrie circulaire

Exercice 1

1) (♡)Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\operatorname{Arcsin} x}{x}$.
2) ($*$)Déterminer la limite en 1, de $\dfrac{\operatorname{Arctan}^2(x) - \frac{\pi^2}{16}}{x^2-1}$.

Exercice 2 Montrer les relations suivantes:

1) (♡)$\forall x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos}(x) = \pi$
2) ($*$)$\forall x \in]-1,1]$, $\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}(x)$

Exercice 3. ($*$) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\operatorname{Arctan} x \geqslant \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 4. ($*$) Soit la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Étudier la continuité la dérivabilite de f et calculer sa dérivée.
3) En déduire une expression plus simple de f.

Exercice 5. ($*$) Représenter graphiquement la fonction d'expression $\operatorname{Arccos}(\cos x)$.

Exercice 6. ($*$) Simplifier la fonction f d'expression $f(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(x)) + \dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$ pour en tracer le graphe.

Exercice 7. ($*$) Simplifier les expressions suivantes en précisant leur domaine de définition

1) $\tan(\operatorname{Arcsin}(x))$
2) $\sin(2\operatorname{Arccos} x)$
3) $\sin(\operatorname{Arctan} x)$

Exercice 8. ($*$) Démontrer la formule de Hutton, $2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{7}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

1) (♡)$\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{3}{4+x^2}\right) + \operatorname{Arccos}\dfrac{2}{3} = \dfrac{\pi}{2}$
2) ($*$)$\operatorname{Arccos}(x) = \operatorname{Arcsin}(2x)$
3) ($**$)$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos}(x\sqrt{2}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 10. ($*$) Faire l'étude de la fonction d'expression $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$ pour en effectuer le tracé de la courbe représentative.

Exercice 11. ($**$) Soit $(a,b) \in (]-1,1[)^2$.

1) Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} c$.
2) Déterminer cette valeur de c.

Trigonométrie hyperbolique

Exercice 12. ($\heartsuit$) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b.$$

Exercice 13. ($*$) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 14. ($\heartsuit$) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $\operatorname{ch} x = 3$.
2) $3 \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x = 1$

Exercice 15. ($*$)

1) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{ch}\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}(5x) = 4 \operatorname{ch}(2x)$.

Exercice 16. ($*$) Soit f la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arccos}(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}) + 2 \operatorname{Arctan}(e^x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2) Étudier la dérivabilité de f et calculer f'.
3) En déduire l'expression de f.

Exercice 17. ($*$) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a+kb) \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a+kb).$$

Exercice 18. ($*$) Calculer les limites suivantes:

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$
2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$
3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\operatorname{sh} x}$
4) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x - \ln(\operatorname{ch} x)$
5) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x)^x$