Les réponses aux questions doivent être soigneusement justifiées. La rigueur, la clarté du raisonnement entrent dans une part importante de la note finale. Les **résultats** doivent être **encadrés**. Vous pouvez sauter des questions en précisant, s'il y a lieu, que vous admettez les résultats non prouvés. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre qui vous convient.

Exercice 1 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note : $Q_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ $\qquad R_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1) -a- Montrer que $Q_n = \prod_{p=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.

   -b- En déduire que $R_n = Q_n^2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\quad (z+1)^{2n} - 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique. On note $z_1, \dots, z_{2n-1}$ les solutions non nulles l'équation (E).

3) On note $P_n = \prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Démontrer que : $R_n = -\frac{P_n}{2^{2n-1}}$.

4) On admet que $P_n = -2n$. En déduire la valeur de Q_n.

5) **Facultatif**. $(**)$ Montrer que $P_n = -2n$.

Exercice 2 On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ on considère la somme

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \qquad \text{avec la convention} \qquad S_1(z) = 1.$$

1) Étude du cas $n = 3$. Dans ce cas $S_3(z) = 1 + z + z^2$.

   -a- Déterminer sous forme algébrique les solutions z de l'équation $S_3(z) = \mathrm{i}$.

   -b- Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $S_3(z) \in \mathbb{R}$.

2) Calculer $S_n(z)$ en fonction de n et z.

3) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer le module et un argument de $S_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}})$.

4) Soit $n \geqslant 2$. Le but de cette question est de déterminer $\Gamma = \{z \in \mathbb{U} \ / \ |S_n(z)| = 1\}$.

   -a- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = \cos\theta$.

   -b- Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z \in \Gamma$ si et seulement si $z^n + \overline{z}^n = z + \overline{z}$.

   -c- En déduire l'ensemble Γ.